第1篇　通用数据资料和数学公式

主　　编　陈　燕　（西安交通大学电气工程学院）

执　　笔　陈　燕

王曙鸿　（西安交通大学电气工程学院）

田培斌　（国家机械工业局第七设计研究院）

王采堂　（西安交通大学电气工程学院）

白小青　（西安爱科电子责任有限公司）

主　　审　邱关源　（西安交通大学电气工程学院）

第1章　计量单位和量纲

1.1　计量单位

1　法定计量单位　法定计量单位以国际单位制(SI)的单位为基础，同时选用一些非国际单位制的单位构成的。它包括：1）国际单位制(SI)的基本单位（表1.1-1）；2）国际单位制的辅助单位及国际单位制中具有专门名称的SI导出单位（表1.1-2）；3）可与国际单位制并用的我国法定计量单位（表1.1-3）；4）由词头和以上单位构成的十进倍数和分数单位（表1.1-4）。

表1.1-1　国际单位制的基本单位

计量	单位名称	符号	定　义
长度	米	m	米是光在真空中1/299792458s时间间隔内所经路径的长度（1983年第17届国际计量大会决议）
质量	千克（公斤）	kg	千克等于国际千克原器的质量（1889年第1届和1901年第3届国际计量大会）
时间	秒	s	秒是铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射9192631770个周期的持续时间（1967年第13届国际计量大会决议）
电流	安[培]	A	在真空中，截面积可忽略的两根相距1m的无限长平行圆直导线内通以等量恒定电流时，若导线间相互作用力在每米长度上为$0.2\mu N$，则每根导线中的电流为1A（1946年国际计量大会决议2和9届国际计量大会批准）
热力学温度	开[尔文]	K	开尔文是水三相点热力学温度的1/273.16（1967年第13届国际计量大会决议4）
物质的量	摩[尔]	mol	摩尔是一系统物质的量，该系统中所包含的基本单元数与0.012kg碳-12的原子数目相等。使用摩尔时，基本单元应予指明，可以是原子、分子、离子、电子及其他粒子，或是这些粒子的特定组合（1971年第14届国际计量大会决议3）

（续）

计量	单位名称	符号	定　义
发光强度	坎[德拉]	cd	坎德拉是一光源（频率为540THz的单色辐射）在给定方向上的发光强度，且该方向上的辐射强度为(1/683)W/sr（1979年第16届国际计量大会决议3）

表1.1-2　包括SI辅助单位在内的具有专门名称的SI导出单位

量的名称	SI导出单位名称	符号	用SI基本单位和SI导出单位表示
[平面]角	弧度	rad	$1rad=1m/m=1$
立体角	球面度	sr	$1sr=1m^2/m^2=1$
频率	赫[兹]	Hz	$1Hz=1s^{-1}$
力	牛[顿]	N	$1N=1kg\cdot m/s^2$
压力，压强，应力	帕[斯卡]	Pa	$1Pa=1N/m^2$
能[量]，功，热量	焦[耳]	J	$1J=1N\cdot m$
功率，辐[射能]通量	瓦[特]	W	$1W=1J/s$
电荷[量]	库[仑]	C	$1C=1A\cdot s$
电压，电动势，电位	伏[特]	V	$1V=1W/A$
电容	法[拉]	F	$1F=1C/V$
电阻	欧[姆]	Ω	$1\Omega=1V/A$
电导	西[门子]	S	$1S=1\Omega^{-1}$
磁通[量]	韦[伯]	Wb	$1Wb=1V\cdot s$
磁通[量]密度，磁感应强度	特[斯拉]	T	$1T=1Wb/m^2$
电感	亨[利]	H	$1H=1Wb/A$
摄氏温度	摄氏度	℃	$1℃=1K$
光通量	流[明]	lm	$1lm=1cd\cdot sr$
[光]照度	勒[克斯]	lx	$1lx=1lm/m^2$
[放射性]活度	贝可[勒尔]	Bq	$1Bq=1s^{-1}$
吸收剂量 比授[予]能 比释动能	戈[瑞]	Gy	$1Gy=1J/kg$
剂量当量	希[沃特]	Sv	$1Sv=1J/kg$

表 1.1-3 可与国际单位制单位并用的我国法定计量单位

量的名称	单位名称	单位符号	与 SI 单位的关系
时间	分 [小]时 日,(天)	min h d	1min=60s 1h=60min=3600s 1d=24h=86400s
[平面]角	度 [角]分 [角]秒	° ′ ″	1°=(π/180)rad 1′=(1/60)°=(π/10800)rad 1″=(1/60)′=(π/648000)rad
体积	升	l,L	$1l=1dm^3=10^{-3}m^3$
质量	吨 原子质量单位	t u	$1t=10^3kg$ $1u\approx1.660540\times10^{-27}kg$
旋转速度	转每分	r/min	$1r/min=(1/60)s^{-1}$
长度	海里	n mile	1n mile=1852m(只用于航行)
速度	节	kn	1kn=1n mile/h=(1852/3600)m/s(只用于航行)
能	电子伏	eV	$1eV\approx1.602177\times10^{-19}J$
级差	分贝	dB	
线密度	特[克斯]	tex	$1tex=10^{-6}kg/m$
面积	公顷	hm^2	$1hm^2=10^4m^2$

表 1.1-4 用于构成十进倍数和分数单位的词头

因数	词头名称 中文	词头名称 英文	符号
10^{24}	尧[它]	yotta	Y
10^{21}	泽[它]	zetta	Z
10^{18}	艾[可萨]	exa	E
10^{15}	拍[它]	peta	P
10^{12}	太[拉]	tera	T
10^{9}	吉[咖]	giga	G
10^{6}	兆	mega	M
10^{3}	千	kilo	k
10^{2}	百	hecto	h
10^{1}	十	deca	da
10^{-1}	分	deci	d
10^{-2}	厘	centi	c
10^{-3}	毫	milli	m
10^{-6}	微	micro	μ
10^{-9}	纳[诺]	nano	n
10^{-12}	皮[可]	pico	p
10^{-15}	飞[母托]	femto	f
10^{-18}	阿[托]	atto	a

说明：1) 本篇表中圆括号中的量与单位的名称是它前面的名称的同义词；2) 无方括号的量与单位的名称均为全称，有方括号的量与单位连续为全称，去掉方括号中的字即为简称。

1.2 常用的物理量和单位

2 空间、时间和周期的量和单位（表 1.1-5）

3 力学的量和单位（表 1.1-6）

4 电学和磁学的量和单位（表 1.1-7）

5 热学的量和单位（表 1.1-8）

6 光及有关电磁辐射的量和单位（表 1.1-9）

7 声学的量和单位（表 1.1-10）

8 常用的物理化学和分子物理学的量和单位（表 1.1-11）

9 常用的原子物理学、核物理学及固体物理的量和单位（表 1.1-12）

10 常用的核反应和电离辐射的量和单位（表 1.1-13）

表 1.1-5　空间、时间和周期的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
[平面]角	$\alpha,\beta,\gamma,\theta,\varphi$	弧度,(度,[角]分,[角]秒)	rad,(°,′,″)	1°=0.017453rad
立体角	Ω	球面度	sr	1sr=1 m²/m²=1
长度 宽 高 厚 半径 直径 程长 距离	l,L b h d,δ r,R d,D s d,r	米	m	
面积	$A,(S)$	平方米,(公顷)	m²,(hm²)	公顷 ha,1ha=10⁴m²
体积	V	立方米,(升)	m³,(l,L)	1L=10⁻³m³
时间, 时间间隔, 持续时间	t	秒,(分,[小]时,日(天))	s,(min,h,d)	
时间常数	τ	秒	s	
角速度	ω	弧度每秒,(度每秒,度每分,度每[小]时)	rad/s,((°)/s,(°)/min,(°)/h)	
角加速度	α	弧度每二次方秒,(度每二次方秒)	rad/s²,((°)/s²)	
速度	v c u,v,w	米每秒,(千米每[小]时)	m/s,(km/h)	1km/h=0.277778m/s
加速度	a	米每二次方秒	m/s²	标准重力加速度 $g_n=9.80665m/s^2$
重力加速度, 自由落体加速度	g			
周期	T	秒	s	
频率	f,ν	赫[兹]	Hz	
旋转频率,(转速)	n	每秒,负一次方秒	s⁻¹	转速的单位
角频率,(圆频率)	ω	弧度每秒	rad/s	$\omega=2\pi f$

表 1.1-6　力学的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
质量	m	千克(公斤),(吨)	kg,(t)	1t=1000kg
线质量,线密度	ρ_l	千克每米,(特[克斯])	kg/m,(tex)	1tex=1g/km,纤维细度单位
面质量,面密度	$\rho_A,(\rho_S)$	千克每平方米	kg/m²	$\rho_A=m/A$
体积质量, [质量]密度	ρ	千克每立方米, (吨每立方米,千克每升)	kg/m³,(t/m³,kg/L)	1t/m³=1000kg/m³ 1kg/L=1000kg/m³
动量	p	千克米每秒	kg·m/s	
动量矩,角动量	L	千克二次方米每秒	kg·m²/s	
转动惯量,(惯性矩)	$J,(I)$	千克二次方米	kg·m²	
力 重量	F $W,(P,G)$	牛[顿]	N	1N=1kg·m/s²=1J/m $W=mg$
力矩,力偶矩 转矩	M M,T	牛[顿]米	N·m	
压力,压强 正应力 切应力	p σ τ	帕[斯卡]	Pa	

（续）

量的名称	符 号	单位名称	单位符号	备 注
[动力]粘度	η	帕[斯卡]秒	Pa·s	
运动粘度	ν	二次方米每秒	m^2/s	
表面张力	γ,σ	牛[顿]每米	N/m	$1N/m=1J/m^2$
功 能[量]	$W,(A)$ E	焦[耳],(瓦[特][小]时), 电子伏	J,(W·h),eV	1W·h=3.6kJ $1eV=1.60217733\times10^{-19}J$
功率	P	瓦[特]	W	1W=1J/s

表 1-1-7 电学和磁学的量和单位

量 的 名 称	符 号	单位名称	单位符号	备 注
电流	I	安[培]	A	
电荷[量]	$Q,(q)$	库[仑],(安[培][小]时)	C,(A·h)	1C=1A·s
体积电荷 电荷[体]密度	$\rho,(\eta)$	库[仑]每立方米	C/m^3	$\rho=Q/V$
面积电荷 电荷面密度	σ	库[仑]每平方米	C/m^2	$\sigma=Q/A$
电场强度	E	伏[特]每米	V/m	$E=F/Q$ 1V/m=1N/C
电位,(电势) 电位差,(电势差),电压 电动势	V,φ $U,(V)$ E	伏[特]	V	1V=1W/A=1A·Ω=1A/S
电通[量]密度(电位移)	D	库[仑]每平方米	C/m^2	
电通[量](电位移通量)	Ψ	库[仑]	C	$\Psi=D\cdot A$
电容	C	法[拉]	F	1F=1C/V,$C=Q/U$
介电常数(电容率) 真空介电常数(真空电容率)	ε ε_0	法[拉]每米	F/m	$\varepsilon=D/E$ $\varepsilon_0=1/\mu_0c_0^2=8.854188\times10^{-12}F/m$
相对介电常数(相对电容率)	ε_r	—	1	$\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0$
电极化率	χ,χ_e	—	1	$\chi=\varepsilon_r-1$
电极化强度	P	库[仑]每平方米	C/m^2	$P=D-\varepsilon_0E$
电偶极矩	$p,(p_e)$	库[仑]米	C·m	
面积电流 电流密度	$J,(S)$	安[培]每平方米	A/m^2	
线电流 电流线密度	$A,(\alpha)$	安[培]每米	A/m	
体积电磁能,电磁能密度	w	焦[耳]每立方米	J/m^3	
坡印廷矢量	S	瓦[特]每平方米	W/m^2	
电磁波的相平面速度 电磁波在真空中的传播速度	c c_0	米每秒	m/s	如介质中的速度用符号c,则真空中的速度用符号c_0 $c_0=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=299792458m/s$
[直流]电阻	R	欧[姆]	Ω	$R=U/I$,1Ω=1V/A
[直流]电导	G	西[门子]	S	$G=1/R$,$1S=1A/V=1\Omega^{-1}$
电阻率	ρ	欧[姆]米	Ω·m	$\rho=RA/l$
电导率	γ,σ	西[门子]每米	S/m	$\gamma=1/\rho$
[有功]电能[量]	W	焦[耳],(瓦[特][小]时)	J,(W·h)	1kW·h=3.6MJ
磁场强度	H	安[培]每米	A/m	1A/m=1N/Wb
磁位差,(磁势差) 磁通势磁动势	U_m F,F_m	安[培]	A	$U_m=\int_1^2 H\cdot dr$ $F=\oint H\cdot dr$

（续）

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
磁通[量]密度 磁感应强度	B	特[斯拉]	T	$1T=1Wb/m^2=1V\cdot s/m^2$
磁通[量]	Φ	韦[伯]	Wb	$1Wb=1V\cdot s$
磁矢位(磁矢势)	A	韦[伯]每米	Wb/m	
磁导率 真空磁导率	μ μ_0	亨[利]每米	H/m	$\mu=B/H$，$1H/m=1V\cdot s$ $\mu_0=1.256637\times10^{-6}H/m$
相对磁导率	μ_r	—	1	$\mu_r=\mu/\mu_0$
磁化强度	M，(H_i)	安[培]每米	A/m	$M=(B/\mu_0)-H$
磁极化强度	J，(B_i)	特[斯拉]	T	$J=B-\mu_0 H$，$1T=1Wb/m^2$
磁阻	R_m	每亨[利]，负一次方亨[利]	H^{-1}	$1H^{-1}=1A/Wb$
磁导	Λ，(P)	亨[利]	H	$\Lambda=1/R_m$，$1H=1Wb/A$
自感 互感	L M，L_{12}	亨[利]	H	$L=\Phi/I$ $M=\Phi_1/I_2$
导纳，(复[数]导纳) 导纳模，(导纳) 电纳 [交流]电导	Y $\|Y\|$ B G	西[门子]	S	$1S=1A/V$ $Y=1/Z$
阻抗，(复[数]阻抗) 阻抗模，(阻抗) [交流]电阻 电抗	Z $\|Z\|$ R X	欧[姆]	Ω	$Z=R+jX$，$\|Z\|=\sqrt{R^2+X^2}$ $X=\omega L-\frac{1}{\omega C}$ (当一感抗和一容抗串联时)
[有功]功率 无功功率 视在功率(表观功率)	P Q S	瓦[特] 乏 伏[特]安[培]	W var VA	$1W=1J/s=1V\cdot A$ $Q=\sqrt{S^2-P^2}$，$S=UI$
功率因数	λ	—	1	$\lambda=P/S$
品质因数	Q	—	1	$Q=\|X\|/R$
频率 旋转频率	f，ν n	赫[兹] 每秒，负一次方秒	Hz s^{-1}	
角频率	ω	弧度每秒 每秒，负一次方秒	rad/s s^{-1}	

表 1.1-8 热学的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
热力学温度	T，Θ	开[尔文]	K	
摄氏温度	t，θ	摄氏度	℃	$t=T-T_0$，$t=\left(\frac{T}{K}-273.15\right)℃$ $T_0=273.15K$
线[膨]胀系数 体[膨]胀系数	α_l α_V (α,γ)	每开[尔文]	K^{-1}	$\alpha_l=\frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{dT}$，$\alpha_V=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dT}$
热，热量	Q	焦[耳]	J	$1J=1N\cdot m$
热流量	Φ	瓦[特]	W	$1W=1J/s$
热导率(导热系数)	λ，(κ)	瓦[特]每米开[尔文]	W/(m·K)	
传热系数	K，(k)	瓦[特]每平方米开[尔文]	W/(m²·K)	
热阻	R	开[尔文]每瓦[特]	K/W	

（续）

量的名称	符 号	单位名称	单位符号	备 注
热容	C	焦[耳]每开[尔文]	J/K	
质量热容	c	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)	$c=C/m$
熵	S	焦[耳]每开[尔文]	J/K	$dS=dQ/T$
质量熵	s	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)	
能(量)	E	焦[耳]	J	$H=U+pV$
焓	H	焦[耳]		
质量能	e	焦[耳]每千克	J/kg	
质量焓	h	焦[耳]每千克	J/kg	

表 1.1-9 光及有关电磁辐射量和单位

量的名称	符 号	单位名称	单位符号	备 注
频率	f,ν	赫[兹]	Hz	$1Hz=1s^{-1}$
角频率	ω	每秒 弧度每秒	s^{-1} rad/s	$\omega=2\pi\nu$
波长	λ	米	m	曾用埃 Å（1Å=0.1nm），不推荐再用Å
辐[射]能	$Q,W,(U,Q_e)$	焦[耳]	J	$1J=1kg\cdot m^2/s^2$
辐[射]能密度	$w,(u)$	焦[耳]每立方米	J/m³	
辐[射]功率，辐[射能]通量 辐[射]出[射]度	$P,\Phi,(\Phi_e)$ $M,(M_e)$	瓦[特] 瓦[特]每平方米	W W/m²	$1W=1J/s$ $\Phi=\int\Phi_\lambda d\lambda$
辐[射]照度	$E,(E_e)$	瓦[特]每平方米	W/m²	
辐[射]强度	$I,(I_e)$	瓦[特]每球面度	W/sr	
辐[射]亮度，辐射度	$L,(L_e)$	瓦[特]每球面度平方米	W/(sr·m²)	$L=\int L_\lambda d\lambda$
发光强度	$I,(I_v)$	坎[德拉]	cd	$I=\int I_\lambda d\lambda$
光通量	$\Phi,(\Phi_v)$	流[明]	lm	$d\Phi=Id\Omega$，$1lm=1cd\cdot sr$
光量	$Q,(Q_v)$	流[明]秒，(流[明][小]时)	lm·s，(lm·h)	1lm·h=3600lm·s
[光]亮度	$L,(L_v)$	坎[德拉]每平方米	cd/m²	该单位曾称尼特(nt)，已废除
[光]照度	$E,(E_v)$	勒[克斯]	lx	$1lx=1lm/m^2$
光出射度	$M,(M_v)$	流[明]每平方米	lm/m²	该量曾称为面发光度
光视效能	K	流[明]每瓦[特]	lm/W	$K=\Phi_v/\Phi_e$
曝光量	H	勒[克斯]秒	lx·s	

表1.1-10 声学的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
静压，(瞬时)声压	p_s,(p)	帕[斯卡]	Pa	1Pa=1N/m²，过去曾用微巴
(瞬时)[声]质点位移	ξ,(x)	米	m	
(瞬时)[声]质点速度	u,v	米每秒	m/s	$u=\partial\xi/\partial t$
(瞬时)体积流量(体积速度)	U,q,(q_v)	立方米每秒	m³/s	$U=Su$，S为面积
声速，(相速)	c	米每秒	m/s	
声能密度	w,(e),(D)	焦[耳]每立方米	J/m³	
声功率	W,P	瓦[特]	W	1W=1J/s
声强[度]	I,J	瓦[特]每平方米	W/m²	
声阻抗率 [媒质的声]特性阻抗	Z_s Z_c	帕[斯卡]秒每米	Pa·s/m	
声阻抗	Z_a	帕[斯卡]秒每立方米	Pa·s/m³	
声质量	M_a	帕[斯卡]二次方秒每立方米	Pa·s²/m³	
声导纳	Y_a	立方米每帕[斯卡]秒	m³/(Pa·s)	$Y_a=Z_a^{-1}$
声压级 声强级 声功率级	L_p L_I L_W	贝[尔]	B	通常用dB为单位 1dB=0.1B
混响时间	T,(T_{60})	秒	s	
隔声量	R	贝[尔]	B	通常dB为单位
吸声量	A	平方米	m²	

表1.1-11 常用的物理化学和分子物理学的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
物质的量	n,(ν)	摩[尔]	mol	
摩尔质量	M	千克每摩[尔]	kg/mol	
摩尔体积	V_m	立方米每摩[尔]	m³/mol	
摩尔热力学能	U_m,(E_m)	焦[耳]每摩[尔]	J/mol	简称为摩尔内能
摩尔焓	H_m			
摩尔热容	C_m	焦[耳]每摩[尔]开[尔文]	J/(mol·K)	
摩尔熵	S_m			
B的浓度 B的物质的量浓度	c_B	摩[尔]每立方米	mol/m³	在化学中也表示成[B]
溶质B的质量摩尔浓度	b_B,m_B	摩[尔]每千克	mol/kg	
扩散系数	D	二次方米每秒	m²/s	
热扩散系数	D_T			
离子的电荷数	z	—	1	无量纲，负离子z为负值
离子强度	I	摩[尔]每千克	mol/kg	
摩尔电导率	Λ_m	西[门子]二次方米每摩[尔]	S·m²/mol	

表 1.1-12 常用的原子物理学、核物理学及固体物理学的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
原子[静]质量	m_a	千克，(原子质量单位)	kg，(u)	$1u=(1.6605402\pm0.0000010)\times10^{-27}kg$
电子[静]质量	m_e			
中子[静]质量	m_n			
元电荷	e	库[仑]	C	
玻尔半径	a_0	米	m	埃(Å)，$1Å=10^{-10}m$，$10Å=1nm$
电四极矩	Q	二次方米	m^2	
核半径	R	米	m	该量常用 fm 表示，$1fm=10^{-15}m$
核的结合能	E_B	焦[耳]，(电子伏)(常用)	J，(eV)	$1eV=(1.60217733\pm0.00000049)\times10^{-19}J$
[放射性]活度	A	贝可[勒尔]	Bq	$1Bq=1s^{-1}$。居里(Ci)，$1Ci=3.7\times10^{10}Bq$
衰变常数	λ	每秒	s^{-1}	$\lambda=1/\tau$
半衰期	$T_{1/2}$	秒，(分，时，日)	s，(min，h，d)	
功函数	Φ，W	焦[耳]，(电子伏)	J，(eV)	
费密能[量] 禁带宽度 施主电离能 受主电离能	E_F，ε_F E_g E_d E_a	焦[耳]，(电子伏)	J，(eV)	
弛豫时间 载流子寿命	τ τ，τ_n，τ_p	秒	s	

表 1.1-13 常用的核反应和电离辐射的量和单位

量的名称	符号	单位名称	单位符号	备注
反应能	Q	焦[耳]，(电子伏)	J，(eV)	该量通常以 eV 为单位
截面	σ	平方米	m^2	
宏观截面 宏观总截面	Σ Σ_{tot}，Σ_T	每米	m^{-1}	
粒子注量	Φ	每平方米	m^{-2}	
能注量	Ψ	焦[耳]每平方米	J/m^2	
质量衰减系数	μ_m	平方米每千克	m^2/kg	
半厚度	$d_{1/2}$	米	m	
形成每对离子平均损失的能量	W_i	焦[耳]，(电子伏)	J，(eV)	
复合系数	α	立方米每秒	m^3/s	
扩散系数，粒子数密度的扩散系数	D，D_n	二次方米每秒	m^2/s	
慢化密度	q	每秒立方米	m^{-3}/s	
对数能降[1]	u	—	1	
平均自由程	l，λ	米	m	
授[予]能	ε	焦[耳]	J	
吸收剂量	D	戈[瑞]	Gy	该量 SI 单位焦[耳]每千克的专名 1rad(拉德)$=10^{-2}Gy$
剂量当量	H	希[沃特]	Sv	该量 SI 单位的专名。1rem(雷姆)$=10^{-2}Sv$
比释动能	K	戈[瑞]	Gy	
照射量	X	库[仑]每千克	C/kg	伦琴(R)，$1R=2.58\times10^{-4}C/kg$(准确值)
粒子辐射度	P	每平方米秒球面度	$m^{-2}/(s\cdot sr)$	
能量辐射度	r	瓦[特]每平方米球面度	$W\cdot m^{-2}\cdot sr^{-1}$	

① 能量为 E 的中子，其对数能降的定义是，$u=\ln E_0/E$，其中 E_0 为参考能量。

1.3　单位换算关系

11　时间和空间的单位换算

(1) 长度单位换算　国际单位制长度基本单位是米(m)。长度单位间换算关系见表 1.1-14。

表 1.1-14　长度单位换算

单位名称	符号	换算关系	备注
千米(公里)	km	1000m	
厘米	cm	10^{-2}m	
毫米	mm	10^{-3}m	
英里	mile	1609.34m	
码	yd	0.9144m	
英尺	ft	0.3048m	
海里	n mile	1852m	
埃	Å	10^{-10}m	常用于表示光谱线波长及其他微小长度
费密	fm	10^{-15}m	用于原子核物理学
天文单位	AU	1.495978×10^{11}m	用于天文学
秒差距	pc	3.0857×10^{16}m	用于天文学
光年	l.y.	9.46053×10^{15}m	用于天文学

(2) 面积单位换算　法定计量单位是平方米(m^2)。其他面积单位换算关系见表 1.1-15。

表 1.1-15　面积单位换算

平方公里 (km^2)	公顷 (ha)	公亩 (a)	平方米 (m^2)	平方厘米 (cm^2)	平方英里 ($mile^2$)	英亩 (acre)	靶恩 (b)	圆密耳	亩
1	10^2	10^4	10^6		0.3861				
	1	10^2	10^4						
		1	10^2			0.02471			
			10^{-4}	1					
			10^{-28}				1		
			5.06707×10^{-10}					1	
			666.6						1

(3) 体积和容积单位换算　法定计量单位是立方米(m^3)。体积单位换算关系见表 1.1-16。

表 1.1-16　体积单位换算

立方米 (m^3)	升 (L)	立方厘米 (cm^3)	立方码 (yd^3)	英加仑 (UKgal)	美加仑 (USgal)
1	1000	10^6	1.308	220	264.2

(4) 时间单位换算(表 1.1-17)

(5) 角速度、转速单位换算(表 1.1-18)

(6) 速度单位换算(表 1.1-19)

表 1.1-17　时间单位换算

单位名称	符号	与法定计量单位的关系	备注
周		604800s(7d)	可与法定计量单位并用
月		2592000s(30d)	可与法定计量单位并用
年	a	31536000s(365d) 31622400s(366d)	可与法定计量单位并用
回归年	a_{trop}	3.15569×10^7s	d 表示 1 日
恒星年		3.15582×10^7s	

表 1.1-18　角速度和转速单位换算

转每分(r/min)	转每秒(r/s)	弧度每秒(rad/s)	度每分[(°)/min]	度每秒[(°)/s]
1	0.0166667	0.104729	360	6
60	1	6.28319	21600	360
0.54930	0.159155	1	3437.75	57.2958
0.00277778	4.62963×10^{-5}	2.90888×10^{-4}	1	0.0166667
0.166667	0.00277778	0.0174533	60	1

表 1.1-19　速度单位换算

千米每时(km/h)	米每分(m/min)	米每秒(m/s)	厘米每秒(cm/s)	英里每时(mile/h)	海里每时(n. mile/h)
1	16.6667	0.2778	27.7778	0.6214	0.54
0.06	1	0.01667	1.6667	0.03728	0.0324
3.6	60	1	100	2.2369	1.944
0.036	0.6	0.01	1	0.0224	0.01944
1.6093	26.82	0.4470	44.7040	1	0.87
1.852	30.867	0.514	51.4	1.1508	1

(7) 加速度单位换算(表 1.1-20)

表 1.1-20 加速度单位换算

单位名称	符号	与法定计量单位的关系	备注
伽(galileo)	Gal	10^{-2}m/s²	
毫伽(milligal)	mGal	10^{-5}m/s²	
英尺每二次方秒	ft/s²	0.3048m/s²	
标准重力加速度	g_n	9.80665m/s²	

(8) 平面角单位换算(表 1.1-21)

表 1.1-21 平面角单位换算

单位名称	符号	与法定计量单位的关系	备注
周角	sr-pla	6.28318rad	2π rad
转	r	6.28318rad	2π rad
冈	^{g},gon,gr	0.0157080rad	0.宇度(π/200)rad
直角	L	1.57080rad	0.5π rad

12 力学单位换算

(1) 质量 法定计量单位为千克(kg),质量单位间换算关系见表 1.1-22。

(2) 密度

常用的线密度换算关系:

1 特克斯(tex)$=10^{-6}$kg/m

1 磅每英尺(lb/ft)=1.48816kg/m

表 1.1-22 质量单位换算

单位名称	符号	换算关系
吨	t	1000kg
英吨	ton	1016kg
美吨	sh.ton	907.185kg
斤		0.5kg
磅	lb	0.45359kg
米制克拉		2×10^{-4}kg
盎司	oz	0.02835kg
格令	gr	6.47989×10^{-5}kg

常用的体密度换算关系有:

1 吨每立方米(t/m³)=1000kg/m³

1 吨每立方米(t/m³)=1000g/L

(3) 力和重量 力的 SI 单位制导出单位为牛顿(N)。

1 牛顿(N)$=10^5$ 达因(dyn)

1 千克力(kgf)=9.80665 牛(N)

1 磅力(lbf)=32.1740 磅达(pdl)

=4.44822 牛(N)

(4) 压力、压强(表 1.1-23)

表 1.1-23 压力、压强单位换算

帕[斯卡](Pa)	微巴(μbar)	毫巴(mbar)	巴(bar)	千克力每平方毫米(kgf/mm²)	工程大气压(at)	毫米水柱(mmH₂O),(kgf/m²)	标准大气压(atm)	毫米汞柱(mmHg)
1	10	0.01	10^{-5}	1.02×10^{-7}	1.02×10^{-5}	0.102	0.99×10^{-5}	0.0075
0.1	1	0.001				0.0102		
100	1000	1	0.001			10.2		0.7501
10^5	10^6	1000	1	0.0102	1.02	1197	0.9869	750.1
98.07×10^5		08067	98.07	1	100	10^6	96.78	73556
98067		980.7	0.9807	0.01	1	10^4	0.9678	735.6
9.807	98.07	0.0981			0.0001	1	0.9678×10^{-4}	0.0736
101325		1013	1.013		1.0332	10332	1	760
133.322	1333	1.333			0.00136	13.6	0.00132	1

(5) 力矩和转矩(表 1.1-24)

表 1.1-24 力矩和转矩单位换算

牛[顿]米(N·m)	千克力米(kgf·m)	克力厘米(gf·cm)	达因厘米(dyn·cm)
1	0.1020	0.1020×10^5	10^7
9.807	1	10^5	9.807×10^7
9.807×10^{-5}	10^{-5}	1	980.7
10^{-7}	1.020×10^{-8}	1.020×10^{-3}	1

(6) [动力]粘度和运动粘度

常用的动力粘度换算有:

1 泊(P)=0.1 帕[斯卡]秒 Pa·s

1 千克力秒每平方米(kgf·s/m²)

=9.81Pa·s

常用的运动粘度换算有:

1 斯[托克斯](St)$=10^{-4}$m²/s

1 平方英尺每秒(ft²/s)

$=92.9\times10^{-3}$m²/s

(7) 动量(表 1.1-25)

表 1-1-25　功和能单位换算

尔　格 (erg)	焦[耳] (J)	千克力·米 (kgf·m)	马力小时	英马力小时 (hp·h)	千瓦时 (kW·h)
1	10^{-7}	0.102×10^{-7}	37.77×10^{-15}	37.25×10^{-15}	27.78×10^{-15}
10^{7}	1	0.102	377.7×10^{-9}	372.5×10^{-9}	277.8×10^{-9}
9.807×10^{7}	9.807	1	3.704×10^{-6}	3.653×10^{-6}	2.724×10^{-6}
26.4779×10^{12}	2.64779×10^{6}	270×10^{3}	1	0.9863	0.7355
26.8452×10^{12}	2.68452×10^{6}	273.8×10^{3}	1.014	1	0.7457
36×10^{12}	3.6×10^{6}	367.1×10^{3}	1.36	1.341	1

(8) 功率　常用的功率换算有：

1 瓦[特](W)＝1J/s

1 千克力米每秒(kgf·m/s)＝9.80665W

1[米制]马力＝735.499W

1[英制]马力(HP)＝745.700W

13　电学和磁学单位换算

电荷：　1 安培小时(A·h)

　　＝3.6×10^{3}C(库仑)

磁通量：　1 麦克斯韦(Mx)＝10^{-8}Wb(韦伯)

磁通密度：1 高斯(Gs)＝10^{-4}T(特斯拉)

磁场强度：1 奥斯特(Oe)＝79.5775A/m

磁通势：　1 吉伯(Gb)＝0.795775A

14　热学单位换算

(1) 温度(表 1-1-26)　表中 C、F、K 分别表示该温标和该温标单位的任一温度数值。

表 1-1-26　温度单位换算

摄氏度(℃)	华氏度(F)	开[尔文](K)
C	$\frac{9}{5}C+32$	$C+273.15$
$\frac{5}{9}(F-32)$	F	$\frac{5}{9}(F+459.67)$
$K-273.15$	$\frac{9}{5}K-459.67$	K

(2) 热导率(表 1-1-27)

(3) 传热系数(表 1-1-28)

表 1-1-27　热导率单位换算

千卡每米时开[尔文] [kcal/(m·h·K)]	卡每厘米秒开[尔文] [cal/(cm·s·K)]	瓦特每米开[尔文] [W/(m·K)]	焦[耳]每厘米秒开[尔文] [J/(cm·s·K)]
1	2.77778×10^{-3}	1.163	0.0116
360	1	418.68	4.1868
0.859845	0.238846×10^{-2}	1	0.01
85.98	0.239	100	1

表 1-1-28　传热系数单位换算

千卡每平方米时开[尔文] [kcal/(m²·h·K)]	卡每平方厘米秒开[尔文] [cal/(cm²·s·K)]	瓦特每平方厘米开[尔文] [W/(cm²·s·K)]	焦[耳]每平方米开[尔文] [J/(m²·K)]
1	2.77778×10^{-5}	1.163×10^{-4}	1.163
36000	1	4.1868	41868
8598.45	0.238	1	10^{-4}
0.859845	0.238846×10^{-4}	10^{-4}	1

(4) 比热容和比熵(表 1-1-29)

表 1-1-29　比热容和比熵单位换算

焦耳每千克开[尔文] [J/(kg·K)]	千卡每千克开[尔文] [kcal/(kg·K)]	热化学千卡每千克开[尔文] [kcalth/kg·K]
1	0.238846×10^{-3}	
4186.8	1	
4184		1

15　光学和声学单位换算　常用单位与法定计量单位的关系：

光亮度单位：1 尼特(nt)＝1cd/m²

　　1 熙提(sb)＝10^{4}cd/m²

光照度单位：1 辐透(ph)＝10^{4}lx

　　1 烛光/英尺²(fc)

　　＝10.76lx

常用的声学单位与法定计量单位的见表(1-1-30)。

16　核反应和电离辐射单位换算(表 1-1-31)

表 1.1-30　声学单位换算

单位名称	单位符号	与法定计量单位的关系	备注
达因每平方厘米	dyn/cm^2	0.1Pa	声压、静压力
尔格每立方厘米	erg/cm^3	$0.1J/m^3$	声能密度
尔格每秒	erg/s	$10^{-7}W$	声功率、声能通量
尔格每秒平方厘米	$erg/(s \cdot cm^2)$	$0.001W/m^2$	声强度

表 1.1-31　核反应和电离辐射单位换算

单位名称	单位符号	与法定计量单位的关系	备注
尔格	erg	$10^{-7}J$	反应能、辐射能、几何能
尔格平方厘米	$erg \cdot cm^2$	$10^{-11}J \cdot m^2$	总原子阻止本领
尔格平方厘米每克	$erg \cdot cm^2/g$	$10^{-8}J \cdot m^2/kg$	总质量阻止本领
居里	Ci	$3.7\times10^{10}Bq$	放射性活度
拉德	Rad,rd	0.01Gy	吸收剂量
雷姆	rem	0.01Sv	剂量当量
伦琴	R	$0.258\times10^{-3}C/kg$	照射量

第2章　物理常数和常用材料物理性能

2.1　物理常数数据

17　物理和电学的常数表(表 1.2-1)

表 1.2-1　物理和电学常数

名称	符号	数值	SI 单位
真空介电常数(真空电容率)	ε_0	$8.854187818\times10^{-12}$	$F \cdot m^{-1}, A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$
真空磁导率(磁常数)	μ_0	1.25663×10^{-6}	$H \cdot m^{-1}, V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$
真空中光速	c, c_0	2.99792×10^8	$m \cdot s^{-1}$
电磁波在真空中速度	c, c_0	2.99792×10^8	$m \cdot s^{-1}$
原子质量单位	u	1.6605655×10^{-24}	g
电子[静止]质量	m_e	0.9109534×10^{-27}	g
质子[静止]质量	m_p	1.6726485×10^{-24}	g
中子[静止]质量	m_n	1.6749543×10^{-24}	g
电子电荷	e	1.6021892×10^{-19}	C, A·s
[经典]电子半径	r_e	2.8179380×10^{-15}	m
玻尔半径	a_0	5.2917706×10^{-11}	m
氢原子玻尔轨道半径	r	5.292×10^{-11}	m
原子核半径	r	$1.2\times10^{-13}\times\sqrt[3]{原子量}$	cm
法拉第常数	F	9.648456×10^4	$C \cdot mol^{-1}, A \cdot s/mol$
玻尔兹曼常数	k	1.380662×10^{-23}	$J \cdot K^{-1}, W \cdot s \cdot K^{-1}$
斯忒藩-玻尔兹曼常数	σ	5.67032×10^{-8}	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
阿伏加德罗常数	L, N_A	6.022045×10^{23}	mol^{-1}

18 大气压力、温度与海拔的关系（表1.2-2）

表1.2-2 大气压力、温度与海拔的关系[1]

海拔/m	大气压力/Pa	温度/K
−300	104981	290.100
−250	104365	289.775
−200	103751	289.450
−100	102532	288.800
−50	101927	288.475
0	101325	288.150
250	98357.6	286.525
500	95461.3	284.900
600	94322.3	284.250
700	93194.4	283.601
800	92077.5	282.951
900	90971.5	282.301
1000	89876.3	281.651
1100	88791.8	281.001
1200	87718.0	280.351
1300	86654.8	279.702
1400	85602.0	279.052
1500	84559.7	278.402
1600	83527.7	277.753
1700	82505.9	277.103
1800	81494.3	276.453
1900	80492.9	275.804
2000	79501.4	275.154
2100	78519.9	274.505
2200	77548.3	273.855
2300	76586.4	273.205
2400	75634.2	272.556
2500	74691.7	271.906
2600	73758.8	271.257
2700	72835.3	270.607
2800	71921.3	269.958
2900	71016.6	269.309
3000	70121.2	268.659
3100	69234.9	268.010
3200	68357.6	267.360
3300	67489.7	266.711
3400	66630.6	266.062
3500	65780.4	265.413
3600	64939.0	264.763
3700	64106.4	264.114
3800	63282.5	263.465
3900	62467.2	262.816
4000	61660.4	262.166
4100	60862.2	261.517
4200	60072.3	260.868
4300	59290.8	260.219
4400	58517.6	259.570
4500	57752.6	258.921
4600	56995.7	258.272
4700	56246.9	257.623
4800	55506.1	256.974
4900	54773.2	256.325
5000	54048.3	255.676
5500	50539.3	252.431
6000	47217.6	249.187
6500	44075.5	245.943
7000	41105.3	242.700
7500	38299.7	239.457
8000	35651.6	236.215
8500	33154.2	232.974
9000	30800.7	229.733
10000	26499.9	223.252

① 资料来源：ISO2533 标准大气，第1版，1975-05-15。

19 常用电磁波谱频率区段（表1.2-3）

表1.2-3 常用电磁波谱频率区段

频率/Hz	应用说明
$50/3 \sim 600$	电力、电机、电动工具
$600 \sim 10^{4}$	淬火、熔炼
$50 \sim 10^{6}$	感应加热
$10^{2} \sim 10^{6}$	有线电话
$10^{2} \sim 2\times10^{5}$	无线电报
$2\times10^{5} \sim 2\times10^{6}$	无线电广播
$2\times10^{6} \sim 3\times10^{9}$	短波、超短波通信
$3\times10^{9} \sim 3\times10^{11}$	微波
$10^{11} \sim 10^{12}$	赫兹波
$10^{12} \sim 3.7\times10^{14}$	红外线热辐射
$3.7\times10^{14} \sim 8.3\times10^{14}$	可见光
$8.3\times10^{14} \sim 3\times10^{16}$	紫外线
$3\times10^{16} \sim 10^{21}$	伦琴射线
$3\times10^{17} \sim 3\times10^{21}$	γ射线
$3\times10^{17} \sim 10^{24}$	宇宙线

2.2 常用材料的物理性能

20 常用电工导体材料的电性能(表1.2-4)

表1.2-4 常用电工导体材料的电性能

(测量温度20℃)

名称	电阻率ρ/(Ω·mm²/m)	电导数γ/[m/(Ω·mm²)]	电阻温度系数α_{20}/(1/K)
铝	0.0278	36	+0.00420
锑	0.417	2.4	
铬	0.208	4.8	
铬-镍-铁	0.10	10	
纯铁	0.10	10	
低碳钢	0.13	7.7	+0.00660
金	0.0222	45	
石墨	8.00	0.125	−0.00020
铸铁	1	1	
镉	0.076	13.1	
碳	40	0.025	−0.00030
康铜	0.48	2.08	−0.00003
导电器材用铜	0.0175	57	+0.00380
镁	0.0435	23	
锰铜	0.423	2.37	±0.00001
黄铜 Ms58	0.059	17	+0.00150
黄铜 Ms63	0.071	14	
德国银	0.369	2.71	+0.00070
镍	0.087	11.5	+0.00400
尼克林合金①	0.5	20	+0.00023
铂	0.111	9	+0.00390
汞	0.941	1.063	+0.00090
银	0.016	62.5	+0.00377
钨	0.059	17	
锌	0.061	16.5	+0.00370
锡	0.12	8.3	+0.00420

① 尼克林合金是一种锌镍铜三元系的α单相固溶合金，接近我国的BZn15−20号锌白铜，化学成分(质量分数)：Cu62%，Ni+Co12.5~16.5%，余量为Zn和0.9%的杂质。

21 常用绝缘材料的电性能(表1.2-5)

表1.2-5 常用绝缘材料的电性能

名称	电阻率ρ/(Ω·cm)	相对介电常数ε_r
聚四氟乙烯		2
聚苯乙烯	10^{17}	3
环氧树脂		3.6
聚酰胺		5
酚醛塑料	10^{11}	3.6
酚醛树脂		8
硬质胶		2.5
胶质不碎玻璃	10^{15}	3.2
石蜡脂	10^{17}	2.2
石油		2.2
变压器油(矿物性)		2.2
变压器油(植物性)		2.5
电容器油	10^{12}~10^{15}	2.4~2.8
松节油		2.2
橄榄油		3
蓖麻油		4.7
云母板		5
石英		4.5
玻璃	10^{11}	5
云母	10^{17}	6
瓷	10^{11}	4.1
页岩		8
皂石		6
大理石	10^{8}	8
硬橡胶	10^{15}	4
软橡胶		2.5
人造琥珀	10^{17}	
电力电缆绝缘		4.2
通信电缆绝缘		1.5
电缆填料		2.5
纸		2.3
硬纸(硬化纸板)		2.5
浸渍纸		5
油纸		4
胶纸板		4.5
层压纸板		3
真空		1
空气	10^{18}	1
水(蒸馏)	10^{8}	80
石蜡	10^{17}	2.2
马来树胶		4
虫胶		3.7

22 常用固体材料的机械性能(表1.2-6)

23 部分液体材料的性能(表1.2-7)

24 部分气体材料的性能(表1.2-8)

表 1.2-6　部分固体材料的机械性能

	材料名称	弹性模量 E/GPa	切变模量 G/GPa	体积模量 K/GPa	泊松比 μ	屈服极限 σ_s/MPa	强度极限 σ_b/MPa	
金属	铝	70	26	73	0.34	30~140	60~160	
	铜	131	46	130	0.35	47~320	200~350	
	金	80	28	167	0.42	[illegible]~210	110~230	
	铁	195	76		0.28	160	350	
	铁(铸)	115	47		0.25		110~320	
	铅	16	6		0.44		15~18	
	镍	207	79	176	0.31	110~660	180~730	
	铂	168	61	230	0.38	15~180	125~200	
	银	76	28	100	0.37	55~300	140~380	
	钽	186					340~830	
	锡	47	17	52	0.36	9~14	15~200	
	钛	110	41	110	0.31	200~500	250~700	
	钨	360	140				1000~4000	
	锌	97	36	100	0.35		110~200	
合金	黄铜(65/35)	105	38	115	0.35	62~430	330~530	
	黄铜(60/40)	103	41	157	0.33	200~440	400~570	
	杜拉铝(4.4%铜)	70	27	74	0.33	125~450	230~500	
	锰铜(84%铜)	124	47				265	
	铁镍合金(77%镍)	220					540~910	
	镍铬合金(80/20)	186					170~900	
	磷青铜	100			0.38	110~670	330~750	
	钢(软)	210	81	170	0.30	240	480	
	钢	210	81	170	0.30	450	600	
非金属							拉伸	压缩
	矾土	200~400			0.24		140~200	1000~25000
	砖(A级)	1~56						69~140
	混凝土(28天)	10~17			0.1~0.21			27~55
	玻璃	50~80			0.2~0.27		30~90	
	花岗岩	40~70						90~235
	尼龙6	1~2.5					70~85	50~100
	有机玻璃	2.7~3.5					50~75	80~140
	聚苯乙烯	2.5~4.0					35~60	80~110
	聚乙烯	0.1~1.0					7~38	15~20
	聚四氟乙烯	0.4~0.6					17~28	5~12
	聚氯乙烯(塑性)	~0.3					14~40	75~100
	橡胶(天然,硫化)	~0.001~1			0.45~0.49		14~40	
	砂石	13~55						30~135
	木材(沿纤维方向)	8~13					20~110	50~100

注：资料来源：摘自 A. M. Howatson 等. Egineering Tables and Data, Chapman and Hall, 1972.

表 1.2-7 部分液体材料的性能

名称		分子式	密度/(kg/m³)	比定压热容/[kJ/(kg·K)]	黏度/(N·s/m²)	导热系数/[W/(m·K)]	凝固点/K	熔解热/(kJ/kg)	沸点/K	汽化热/(kJ/kg)	相对介电常数 ε_r
醋酸		$C_2H_4O_2$	1049	2.18	0.001155	0.171	290	181	391	402	6.15
乙醇		C_2H_5OH	783.1	2.44	0.001095	0.171	158.6	108	351.48	846	24.3
甲醇		CH_3OH	786.5	2.51	0.00056	0.202	175.2	98.8	337.8	1100	32.6
丙醇		C_3H_8O	800.0	2.37	0.00192	0.161	146	86.5	371	779	20.1
酒(谷类)			823.5	4.20		0.353					16.9
苯		C_6H_6	873.8	1.72	0.000650	0.144	278.68	126	353.3	390	2.2
溴		Br_2		0.473	0.00095		265.84	66.7	331.6	193	3.2
二硫化碳		CS_2	1261	0.992	0.00036	0.161	161.2	57.6	319.40	351	2.64
四氯化碳		CCl_4	1584	0.816	0.00091	0.104	250.35	174	349.6	194	2.23
蓖麻油			956.1	1.97	0.650	0.180	263.2				4.7
醚		$C_4H_{10}O$	713.5	2.21	0.000223	0.140	157	96.2	307.7	372	4.3
甘油		$C_3H_8O_3$	1259	2.62	0.950	0.287	264.8	200	563.4	974	40
煤油			820.1	2.09	0.00164	0.145	—			251	
亚麻仁油		—	929.1	1.84	0.0331		253		560		3.3
苯酚		C_6H_6O	1072	1.43	0.0080	0.190	316.2	121	455		9.8
海水			1025	3.76~4.10			270.6				—
水		H_2O	997.1	4.18	0.00089	0.609	273	333	373	2260	78.54
制冷剂	R-11	CCl_3F	1476	0.870	0.00042	0.093	162		297.0	180(297K)	2.0
	R-12	CCl_2F_2	1311	0.971		0.071	115	34.4	243.4	165(297K)	2.0
	R-22	CHF_2Cl	1194	1.26		0.086	113	183	232.4	232(297K)	2.0

注:1. 本表数据是在101325Pa气压、300K温度下测定。

2. 资料来源:(1)《Handbook of Materials Science》,Vol. 1,General Properties,1974;(2) CRC《Handbook of Tables for Applied Engineering Science》,1970。

表 1.2-8 部分气体材料的性能

名称	分子式	密度(0℃)/(g/L)	液化点/K	质量定压热容 c_p/[10^3J/(kg·K)]	黏度(20℃)/(10^{-6}N·s/m²)	相对介电常数 ε_r(0℃)
空气		1.2929		1.0048	18.12	1.000576
二氧化碳	CO_2	1.9769	216	0.8374	14.57(15℃)	1.000946
一氧化碳	CO	1.2504	68	1.0383	18.40	1.000695
氨	NH_3	0.7710	198	2.1788(23~100℃)	10.2	1.0072
乙烯	C_2H_4	1.2560	104	1.4496	10.1	1.00150
氯化氢	HCl	1.6392	161.0	0.8122(13~100℃)	14.0	
硫化氢	H_2S	1.539	187	1.0262(20~206℃)	13.0	1.00332
沼气	CH_4	0.717	90.6	0.5313	12.01	1.000944
二氧化硫	SO_2	2.9269	197	0.6464(16~202℃)	12.9	1.00905
乙炔	C_2H_2	1.1717		1.6033(15℃)		

注:1. 表中数据是在101325Pa气压下测定。

2. 主要资料来源:《Handbook of Engineering Fundamentals》,Eshbach,3ed,1974,P.1504~1505。

第 3 章　电 工 标 准[23~26]

3.1　标准和标准化概述

25　基本概念、标准的分级和代号、标准专业分类及代号　标准是指为在给定范围内达到最佳秩序，对各种活动或其结果所规定的、共同的和重复使用的规则、指导原则或特性，经过协商根据多数意见制定并经过公认机构批准的一种文件。标准应以科学、技术和经验的综合成果为基础，并以增进社会效益为目的。

标准化是指为在给定范围内达到最佳秩序，对实际的或潜在的问题规定共同的和重复使用的规则的活动，标准化包括标准的制定、发布和实施的整个过程。以改进产品、方法和服务的适应性，并防止贸易壁垒，便于技术合作。

按级别分，标准有国家标准、行业标准、地方标准和企业标准。行业标准不得与国家标准相抵触，地方标准不得与国家标准、行业标准相抵触，企业标准不得与国家标准、行业标准、地方标准相抵触。国家标准、行业标准分为强制性标准和推荐性标准。

表 1.3-1　标准文献分类与代号[27]

A	综合	N	仪器、仪表
B	农业、林业	P	工程建设
C	医药、卫生劳动保护	Q	建材
D	矿业	R	公路、水路运输
E	石油	S	铁路
F	能源、核技术	T	车辆
G	化工	U	船舶
H	冶金	V	航空、航天
J	机械	W	纺织
K	电工	X	食品
L	电子元器件与信息技术	Y	轻工、文化与生活用品
M	通信、广播	Z	环境保护

国家标准、行业标准、地方标准和企业标准都由标准代号、顺序号和批准发布年号三段组成。国家标准代号及符号有三种：GB××××—××××（强制性国家标准），GB/T××××—××××（推荐性国家标准）和 GB/Z××××—××××（指为行业标准而尚未转化的原国家标准）。行业标准代号由国务院标准化行政主管部门规定。例如，强制性电力行业标准代号为 DL，推荐性电力行业标准代号为 DL/T。地方标准的标准代号为 DB 加上省、自治区或直辖市的代码前两位数字。例如陕西省强制性地方标准代号为 DB61，推荐性地方标准代号为 DB61/T。企业标准代号为 Q/加企业代号组成。各种代号见文献[27]。标准分类与代号见表 1.3-1。

3.2　国际标准和国外先进标准[28,29]

26　国际标准、国外先进标准的概念、部分国际标准、国外先进标准名称和代号　**国际标准**　指和国际电工委员会（IEC）所制定的标准，以及国际标准化组织（ISO）确认并公布的其他国际组织制定的标准。

国外先进标准　指未经 ISO 确认并公布的国际组织的标准，发达国家的国家标准，区域性组织的标准，国际上有权威的团体标准和企业（公司）标准中的先进标准。

常见国际标准及一些国家标准见表 1.3-2，IEC 标准见表 1.3-3，IEC 日用电器安全标准见表 1.3-4。我国基本等效采用 IEC 日用电器安全标准。

表 1.3-2　常见国际标准及一些国家标准

ANSI	美国国家标准
ASTM	美国试验与材料学会标准
BIPM	国际计量局
BS	英国国家标准
CCIR	国际无线电咨询委员会
CCITT	国际电报电话咨询委员会
CEN	欧洲标准化委员会
CENELEC	欧洲电工标准化委员会
CIE	国际照明委员会
CIS-PR	国际无线电干扰特别委员会
DIN	德国国家标准
DKE	德国电工委员会标准

（续）

IEC	国际电工委员会
IEEE	电气电子工程师学会标准
IIW	国际焊接学会
ISO	国际标准化组织
ITU	国际电信联盟
JIS	日本工业标准
MIL	美国军用标准
NEMA	美国电气制造商协会标准
NF	法国国家标准
OIML	国际法制计量组织
SEMI	国际半导体设备和材料组织
UIC	国际铁路联盟
UL	美国保险商实验所安全标准
VDE	德国电气工程师协会标准
ГОСТ	俄罗斯国家标准

表 1.3-3 IEC 标准

标准名称	标准号
国际电工词汇	50
标准电压、电流、频率	38,59,196
建筑物电气装置	364
建筑物电气装置的电压区段	449
建筑物防雷	1024
电气安全导则	1200
家用电器的安全	335
电热装置安全	519
电流通过人体的效应	479
电气和电子设备防触电保护	536
人机界面、标志和标识的基本和安全要求—编码规则	73
绝缘导线的标志	391
用颜色或数字识别导体的方法	446
颜色标示代号	757
电气技术用文字符号	27
图用图形符号	617
电工技术中的项目代号	750
绝缘配合	71
避雷器选择和使用导则	99
高压电器	56,265,420,470,694,1233,1633
交流隔离开关	1128
72.5kV 及以上 GIS	517,1259
72.5kV 及以上 GIS 电缆连接	859
1～52kV 金属封闭式成套开关与控制装置	298
交流隔离开关及接地开关	129
低压成套开关设备和控制设备	439
高/低压预制变电站	1330
低压控制设备	158
由外壳提供的保护等级（IP 代码）	529
接触器	470,486
铅酸牵引蓄电池	254
镉镍电池	622-623
爆炸危险气体中的电气装置	79
户外严酷条件下（含露天矿及采石场）的电气装置	621
环境条件的划分	721
电气测量仪表及其附件	51,145,387,521,523-687
电气继电器	255
旋转电机埋入式热保护	34-11
高压电机起动器	632
油浸及干式变压器，有载调压器应用	76,310,542,606,616,722,726,905
变压器回路高压熔断器熔体选择应用导则	787
电气牵引设备	77
互感器	44,185,186
家用及类似目的熔断器	241
低压熔断器	269
熔断器定义	291
小型熔断器	127
电力系统电容器	143
电容器组保护设备	143-2
并联电容器外部保护用熔断器	549
串联电容器内部熔断器	595
导体载流量	448
电缆选择，载流量，短路温度限值，敷设	287,228,215,183,92,724,853,986
电缆周期性电流及应急电流计算	853
电缆试验方法	885
软电缆芯线颜色	173
电缆的耐燃特性	331
射频电缆	96,1196
射频连接器	169
光纤电缆、接头、分支器、开关	827,874,875,876
电线电缆穿管	614,1035
照明器	598

（续）

标 准 名 称	标 准 号
白炽灯安全规程	432
单端荧光灯安全规程	1199
常用照明设备抗干扰要求	4347
卤钨灯	357
普通照明用管式荧光灯	81
荧光灯启辉器	155
低压钠灯	192
高压汞灯	188
高压钠灯	662
管式荧光灯镇流器	920,921
管式荧光灯交流电子镇流器	924,925
放电灯镇流器	922,923,926, 927,928,929
自镇流器	968,969
管式荧光灯灯座及启动器座	400
爱迪生螺口灯座	238
各种灯座	838
灯头与灯座	83,109

（续）

标 准 名 称	标 准 号
铝母排	105,114
架空线	144,888,889, 912,1232
架空裸绞线计算方法	1597
架空输电线的荷载及强度	826
架空线绝缘子	345,383
架空线金具要求及试验	1384
架空线杆塔荷载试验	652
交流电力系统阻波器	353
电力载波系统耦合装置	481
三相交流系统短路计算	909
放射式低压系统短路电流计算程	781
用导则	
矿用电气设备	601,975,977, 1262,1393
船用电气装置	92
报警系统	839

表 1.3-4 家用和类似用途电器的安全系列标准一览表

标 准 名 称	IEC标准号	国家标准号
通用要求	IEC335-1	GB4706.1
电熨斗的特殊要求	IEC335-2-3	GB4706.2
食物搅拌器及类似用途电器的特殊要求	IEC335-2-14	GB4706.3
电水壶的特殊要求	IEC335-2-15	GB4706.4
电炒锅的特殊要求	IEC335-2-13	GB4706.5
自动电饭锅的特殊要求		GB4706.6
真空吸尘器的特殊要求	IEC335-2-2	GB4706.7
电热毯、电热垫和柔性电热器的特殊要求	IEC335-2-17	GB4706.8
电动剃须刀、电推剪及类似器具的特殊要求	IEC335-2-8	GB4706.9
按摩电器的特殊要求	IEC335-2-32	GB4706.10
快热式电热水器的特殊要求	IEC335-2-35	GB4706.11
贮水式电热水器的特殊要求	IEC335-2-21	GB4706.12
家用电冰箱和食品冷冻箱的特殊要求	IEC335-2-4	GB4706.13
电烤箱、面包烘烤器、华夫烙饼模及类似用途器具的特殊要求	IEC335-2-9	GB4706.14
皮肤及毛发护理器具的特殊要求	IEC335-2-23	GB4706.15
电池驱动的电动剃刀、电推剪及其充电和电池组的特殊要求	IEC335-2-19	GB4706.16
电动机-压缩机的特殊要求	IEC335-2-34	GB4706.17

（续）

标准名称	IEC标准号	国家标准号
电池充电器的特殊要求	IEC335-2-29	GB4706.18
液体加热器具的特殊要求	IEC335-2-15	GB4706.19
滚筒式干衣机的特殊要求	IEC335-2-11	GB4706.20
微波烹调器具的特殊要求	IEC335-2-25	GB4706.21
家用电灶、灶台、烤炉及类似器具的特殊要求	IEC335-2-6	GB4706.22
室内加热器的特殊要求	IEC335-2-30	GB4706.23
洗衣机的特殊要求	IEC335-2-7	GB4706.24
洗碗机的特殊要求	IEC335-2-5	GB4706.25
离心式脱水机的特殊要求	IEC335-2-4	GB4706.26
电风扇和调速器的特殊要求	IEC342-1	GB4706.27
吸油烟机的特殊要求	IEC335-2-31	GB4706.28
电磁灶的特殊要求	IEC335-2-31	GB4706.29
电动食品加工器具的特殊要求	IEC335-2-14	GB4706.30
房间空气调节器电气设备的安全要求	IEC378	GB5956

3.3 国家标准中电工标准简介

27 常用的电工标准 见表1.3-5及表1.3-6。

表1.3-5 通用电工标准名称、代号

标准代号	标准名称
GB/T762—1996	标准电流
GB/T990—1988	直流电力牵引电压系列
GB/T1980—1996	标准频率
GB/T2421~2424—81~97	电工电子产品环境试验规程
GB/T2900.1~49	电工基本名词术语及各专业名词术语
GB/T3805—1993	特低电压(ELV)限值
GB/T4728—84,85,96	电气图用图形符号
GB/T5094—1985	电气技术中项目代号
GB/T5465.1~2—1996	电气设备用图形符号
GB156—1993	标准电压
GB311.1~7—83~95	高压输变电设备的绝缘配合及高压试验技术
GB3785—83	声级计的电声性能及测量方法
GB3907—83	工业无线电干扰基本测量方法
GB3926—83	中频设备额定电压
GB4026—83	电器接线端子的识别和用字母、数字符号标志接线端子的通则
GB4064—83	电气设备安全设计导则
GB6988.1~7—86,93	电气制图
GB7159	电气技术中的文字符号制订通则
CECS37	工业企业通信工程设计图形及文字符号标准

表1.3-6 专业用电工标准名称、代号

标准名称	标准号
供电电压允许偏差、电压允许波动和闪变	GB12325 GB12326
电气装置安装工程电气设备交接试验标准	GB50150
建筑电气安装工程质量检验评定标准	GBJ303
工业企业照明	GB50034
民用建筑照明	GBJ133
城市道路照明	CJJ45
地下建筑照明	CECS45
低压成套开关设备	GB7251
低压抽出式成套开关设备	ZBK36001

（续）

标准名称	标准号
电梯技术条件	GB/T10058
电梯试验方法	GB/T10059
并联电容器用串联电抗器设计选择	CECS32
并联电容器装置的电压、容量系列选择	CECS33
电工名词术语　电气传动及自动控制	GB2900.34—83
电气传动控制设备基本试验方法	GB10233—88
面板、架和柜的基本尺寸系列	GB3047.1—95
电控设备产品型号编制办法	GB3752—84
电控设备第一部分：低压电器电控设备	GB4720—84
电控设备第二部分：装有电子器件的电控设备	GB3797—89
控制电气设备操作件标准运动方向	GB4205—84
电控设备通用解件产品型号编制办法	GB3347—83
同步电动机半导体励磁装置总技术条件	GB12667—90
交流电动机半导体变频调速装置总技术条件	GB12668—90
半导体变流串级调速装置总技术条件	GB12669—90
电工成套装置中的导线颜色	GB2681—81
导体的颜色或数字标识	GB7947
绝缘导线的标记	GB4884
指示灯和按钮的颜色	GB4025—83
外壳防护等级(IP代码)	GB4208—93
中、短波广播发射台与电缆载波通信系统的防护间距	GBJ142
架空电力线路、变电所对电视差转台、转播台无线电干扰防护间距	GBJ143

28　标准电压　国家标准GB156《标准电压》规定了电力系统的标称电压值、电气设备的额定电压值和电气设备的最高电压值，适用于直流和50Hz交流的系统和电气设备，也适用于电子设备、电信设备和电气器具，不适用于下列设备，但不予限制：1）电气设备内部的元器件和部件的电压；2）表示信号、传输信号或测量值的电压；3）专用试验设备的电压。

GB156规定的220～1000(1140)V的交流电力系统（三相四线或三相三线）的标称电压值及电气设备（不包括发电机）的额定电压值见表1.3-7；3kV及以上的三相交流系统的标称电压值和电气设备的最高电压值见表1.3-8，交流380V及以下和直流2000V及以下的电气设备（不包括发电机）的额定电压值见表1.3-9；发电机的额定电压值见表1.3-10。

表1.3-7　220—1000(1140V)的交流系统的标称电压值及电气设备的额定电压值

（V）

220/380	380/660	1000(1140)

注：1. 1140V仅限于煤矿井下使用。
2. 斜线之上为相电压，斜线之下为线电压，无斜线为三线系统线电压。

表1.3-8　3kV及以上的三相交流系统的标称电压值和电气设备的最高电压值

（kV）

系统的标称电压值	设备的最高电压值	系统的标称电压值	设备的最高电压值
3	3.6	110	126(123)
6	7.2	220	252(245)
10	12	330	363
(20)	(24)	500	550
35	40.5	(750)	(800)
66	72.5	—	1200

注：1. 括号中的数值为用户有要求时使用。
2. 电气设备的额定电压值可从表中选取，由产品标准确定。

表1.3-9　交流380V及以下和直流2000V及以下的电气设备额定电压值　（V）

直流额定电压值		交流额定电压值	
优先值	补充值	优先值	补充值
—	1.2	—	—
1.5	—	—	—
2	—	—	—
—	2.4		—
3	—	—	—
—	4.5	—	—
—	5	—	5
6	—	6	—
—	9	—	—
12	—	12	—
—	15	—	15
24	—	24	—

（续）

直流额定电压值		交流额定电压值	
优先值	补充值	优先值	补充值
—	40	—	—
36	—	36	—
—	—	—	42
48	—	48	—
60	—	—	60
72	—	—	—
—	—	—	100
110	—	110	—
—	—	—	127
160	—	—	—
220	—	220	—
—	—	380	—
—	400	—	—
440	—	—	—
—	630	—	—
800	—	—	—
1000	—	—	—
—	1250	—	—
1500	—	—	—
2000	—	—	—

中频设备的额定电压在GB3926《中频设备额定电压》国家标准中规定，船舶和海上石油平台用电工产品的额定电压在GB4988中规定。直流电力牵引的额定电压在GB999中规定。

原国家标准GB3805—83《安全电压》已被国家标准GB3805—93《特低电压（ELV）限值》代替，新标准GB3805—93规定的电压限值是指在最不利的情况下允许存在于两个可同时触及的可导电部分间的最高电压。具体规定见GB3805—93。

表1.3-10 发电机的额定电压值

（V）

交流发电机额定电压值	直流发电机额定电压值	交流发电机额定电压值	直流发电机额定电压值
115	115	13800	—
230	230	15750	—
400	460	18000	—
690	—	20000	—
3150	—	22000	—
6300	—	24000	—
10500	—	26000	—

注：与发电机出线端配套的电气设备额定电压，可采用发电机的额定电压，在产品标准中具体规定。

29 标准电流 GB762—1996规定了电气设备电流值，适应于以电流为主要参数的交、直流电气设备，包括电工设备、电子设备以及家用和类似用途的电气器具。GB762—1996不适用于电气设备内部的控制回路。标准电流值见表1.3-11。

30 标准频率 GB/T1980—1996规定了电气设备的标准频率值。它适用于频率从50～10000Hz的单相和三相交流电力系统及电气设备（包括电工设备、电子设备、电信设备以及家用和类似用途的电气器具），本标准不适用于铁道信号控制回路、单台设备或一组设备的内部控制回路。标准频率值见表1.3-12。

表1.3-11 标准电流值

（A）

电流范围	标准电流值										
1～10000	1	1.25	1.6	2	2.5	3.15	4	5	6.3	8	
	10	12.5	16	20	25	31.5	40	50	63	80	
	100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	
	1000	1250	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000	10000
<1			0.00001						0.00005		
	0.0001		0.0002		0.000315	0.0004		0.0005	0.00063	0.0008	
	0.001	0.00125	0.0016	0.002	0.0025	0.00315	0.004	0.005	0.0063	0.008	
	0.01	0.0125	0.016	0.02	0.025	0.0315	0.04	0.05	0.063	0.08	
	0.1	0.125	0.16	0.2	0.25	0.315	0.4	0.5	0.63	0.8	
>10000	12500	16000	20000	25000	31500	40000					
	50000	63000	80000	100000	125000	160000					

表 1.3-12　标准频率值　(Hz)

50(60)	100	150	200	250	300	400	500	600	750
1000	1200	1500	2000	2400	3000	4000	8000	10000	

注：1. 划有横线的频率值为优先值。
2. 带(　)值仅做专用电器系统使用。
3. 由感应电动机驱动的旋转机组所产生的频率，其实际频率略低于上列的数值。

第4章　数学公式

4.1　阶乘、排列和组合、二项式定理[9]

31　阶乘、排列和组合、二项式定理

(1) 阶乘　$n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-2)(n-1)n$

$0!=1\quad 0!!=0\quad(-1)!!=0$

(2) 排列　从 n 个不同元素中每次取 m 个元素的排列

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

(3) 组合　从 n 个不同元素中每次取 m 个元素的组合

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

(4) 二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\cdot a^{n-i}\cdot b^i$$

4.2　复数[9]

32　复数运算

若：$z_1=a+jb=r_1(\cos\phi_1+j\sin\phi_1)$

$=r_1e^{j\phi_1}$

$z_2=c+jd=r_2(\cos\phi_2+j\sin\phi_2)=r_2e^{j\phi_2}$

则　$z_1\pm z_2=(a\pm c)+j(b\pm d)$

$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{j(\phi_1+\phi_2)}$

$z_1/z_2=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\phi_1-\phi_2)}$

$z_1^n=[r_1(\cos\phi_1+j\sin\phi_1)]^n=r_1^ne^{jn\phi_1}$

$z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)+j\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right]$

$=r^{\frac{1}{n}}e^{j\frac{\phi+2k\pi}{n}}$

$k=0,1,2,\cdots(n-1)$

$z=a+jb$ 的共轭复数：$\bar{z}=a-jb$

$e^{j2\pi}=1,\ e^{j\pi}=j^2=-1,\ e^{j\frac{3\pi}{2}}=j^3=-j$

$e^{j\frac{\pi}{2}}=j=\sqrt{-1},\ e^{-j\frac{\pi}{2}}=j^{-1}=-j$

4.3　常用函数[9~11]

33　三角函数、反三角函数

(1) 基本恒等式

$\sin\alpha\csc\alpha=1\qquad\cos\alpha\sec\alpha=1$

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\qquad\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1\qquad\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(2) 和(差)角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

(3) 倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\sin n\alpha=C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha$

$+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\cdots+$

$\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^n\sin^n\alpha & (n\ 为奇数)\\(-1)^{\frac{n-2}{2}}C_n^{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & (n\ 为偶数)\end{cases}$

$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$

$+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\cdots+$

$\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}C_n^{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha & (n\ 为奇数)\\(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^n\sin^n\alpha & (n\ 为偶数)\end{cases}$

（4）半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

（5）和差与积互化公式

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\alpha+\arctan\frac{b}{a}\right)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

（6）反三角函数

$$\sin(\arcsin x)=\cos(\arccos x)=\tan(\arctan x)=x$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arccot} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

如下等式左边两角之和或差在主值范围内取值时，等式成立：

$$\arcsin x\pm\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arccos x\pm\arccos y=\arccos\left[xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]$$

$$\arctan x\pm\arctan y=\arctan\left[\frac{x\pm y}{1\mp xy}\right]$$

$$\operatorname{arccot} x\pm\operatorname{arccot} y=\operatorname{arccot}\left[\frac{xy\mp1}{y\pm x}\right]$$

34　双曲函数、反双曲函数和对数函数

（1）双曲函数

双曲正弦　$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦　$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切　$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

双曲余切　$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

双曲正割　$\operatorname{sech}x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

双曲余割　$\operatorname{cosech}x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$

（2）双曲函数的基本关系

$$\sinh(-x)=-\sinh x$$

$$\cosh(-x)=\cosh x$$

$$\tanh x\coth x=1$$

$$\cosh^2x-\sinh^2x=1$$

$$\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$$

$$\coth^2x-\operatorname{cosech}^2x=1$$

反双曲正弦　若 $x=\sinh y$，则

$$y=\operatorname{arsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

反双曲余弦　若 $x=\cosh y$，则

$$y=\operatorname{arcosh}x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),(x\geqslant1)$$

反双曲正切　若 $x=\tanh y$，则

$$y=\operatorname{artanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},(|x|<1)$$

反双曲余切　若 $x=\coth y$，则

$$y=\operatorname{arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},(|x|>1)$$

反双曲正割　若 $x=\operatorname{sech}y$，则

$$y=\operatorname{arsech}x=\pm\frac{1}{2}\times\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}},$$

$$(0<|x|<1)$$

反双曲余割　若 $x=\operatorname{cosech}y$，则

$$y=\operatorname{arcosech}x=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1},(x\neq0)$$

反双曲函数基本公式

$$\operatorname{arsinh}x=\pm\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}x=\pm\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\operatorname{artanh}x=\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\operatorname{arsinh}x \pm \operatorname{arsinh}y = \operatorname{arsinh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\operatorname{arsinh}x \pm \operatorname{arcosh}y = \operatorname{arcosh}\left[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$$

$$\operatorname{artanh}x \pm \operatorname{artanh}y = \operatorname{artanh}\frac{x \pm y}{1 \pm xy}$$

(3) 对数函数

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x^n = n\log_a x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

35　三角函数、双曲函数和指数函数的关系

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin jx = j\sinh x$$

$$\cos jx = \cosh x$$

$$\sinh jx = j\sin x$$

$$\cosh jx = \cos x$$

4.4　矩阵

36　矩阵及矩阵代数运算、特殊方阵、特征根、特征向量和特征方程　$m \times n$ 阶矩阵记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$，简记为 A，即

$$A = A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

若 $m=n$，A 称为 n 阶方阵。

(1) 方阵 A 的迹和秩　n 阶方阵 A 所有主对角元之和，称为 A 的迹，记作 $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。

若 n 阶方阵 A 的 n 个列向量中有 r 个线性无关（$r \leqslant n$），而所有个数大于 r 的列向量都线性相关，则称数 r 为矩阵 A 的列秩。类似可定义矩阵 A 的行秩。矩阵 A 的列秩和行秩一定相等，亦称之为矩阵 A 的秩，记作 $\mathrm{rank}A = r$。如果 $r=n$，则称满秩，必有 $|A| \neq 0$，故非奇异方阵为满秩矩阵，简称满阵。若 $r<n$，则称为 A 降秩矩阵，即是奇阵。

(2) 矩阵的代数运算　见表 1.4-1。

(3) 一些特殊方阵　见表 1.4-2。

(4) 矩阵的特征值、特征向量和特征方程　对 n 阶方阵 A 和 n 维列向量 α，如有一个数 λ，使得 $A\alpha = \lambda\alpha$，则称 λ 为矩阵 A 的特征值（特征根），α 为 A 的特征值 λ 所对应的特征向量。

$A-\lambda I$ 称为特征矩阵，$|A-\lambda I|$ 称为矩阵 A 的特征多项式。$|A-\lambda I|=0$ 则称为 A 的特征方程。特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 A 的 n 个特征值（亦称本征值）。集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 称为 A 的谱，记作 $\mathrm{ch}A$。

表 1.4-1　矩阵的几种代数运算法则

说明和运算公式	一　般　规　律
(1) 加减　同阶矩阵才能相加减，各对应位置元素相加减 设　$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$C=A\pm B$ 则　$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$　$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$	$A+B=B+A$　（交换律） $A+(B+C)=(A+B)+C$（结合律）
(2) 数乘　数乘矩阵时，将数乘到矩阵的每个元素上 $k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$	$kA=Ak$ $k(A+B)=kA+kB$ $(k+h)A=kA+hA$ $k(hA)=h(kA)$　（k、h 为任意两常数）

（续）

说明和运算公式	一般规律
3）乘法 若 A、B 分别为 $m\times n$ 阶和 $n\times s$ 阶矩阵，则 $C=AB$，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$ C 必为 $m\times s$ 阶矩阵，c_{ij} 等于左矩阵的第 i 行与右矩阵的第 j 列对应元素相乘之后相加。左矩阵的列数必须等于右矩阵的行数	若 A,B,C 为三矩阵，且能满足运算要求，则 $(AB)C=A(BC)$ （结合律） $(A+B)C=AC+BC$ （分配律） $C(A+B)=CA+CB$ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ （数乘结合律） $AB\neq BA$ （不满足交换律）
4）转置 把 $(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换后得到的 $n\times m$ 阶矩阵称 A 的转置矩阵（或称转阵）记作 A^T 或 A'，即 $A^T=A'=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$	$(A+B)^T=A^T+B^T$ $(kA)^T=kA^T$ （k 为任意常数） $(A^T)^T=A$ $(AB)^T=B^TA^T$ $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^T\cdots A_2^TA_1^T$（反序定律） $(A^k)^T=(A^T)^k$（k 为整数）
5）把复矩阵 A 的所有元素换成它们的共轭复数得到的矩阵称 A 的共轭矩阵，记作 A^* 或 $\bar{A}$，即 $A^*=(a_{ij}^*)=(\bar{a}_{ij})$	$(A+B)^*=A^*+B^*$ $(kA)^*=k^*A^*$ （k 为任意复数） $(AB)^*=A^*B^*$ $(A^T)^*=(A^*)^T$

表 1.4-2 一些特殊方阵[11]

特殊方阵类型	定义（或矩阵应满足的条件）
单位矩阵 E（或 I）	$a_{ij}=\delta_{ij}$ $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$
零矩阵	$a_{ij}=0$
纯量矩阵 aE	$a_{ij}=a\delta_{ij}$
对角矩阵	$a_{ij}=a_i\delta_{ij}$
降秩（退化）矩阵	$\lvert A\rvert=0$（或称奇异矩阵）
实数矩阵	$A=A^*$
虚数矩阵	$A=-A^*$
转置共轭矩阵	$A^{T*}=A^{*T}$（或记作 A^H，亦称 A 的缔合矩阵）
对称矩阵	$A^T=A$
反对称矩阵	$A=-A^T$，$a_{ii}=0$
厄米特矩阵	$A=A^{T*}=A^{*T}=A^H$（主对角元均为实数）
斜厄米特矩阵	$A=-A^{*}=-A^H$（主对角元均为零或虚数）
上三角形矩阵	$a_{ij}=0$ $i>j$
严格上三角形矩阵	$a_{ij}=0$ $i\geq j$
下三角形矩阵	$a_{ij}=0$ $i<j$

（续）

特殊方阵类型	定义（或矩阵应满足的条件）
严格下三角形矩阵	$a_{ij}=0$ $i\leq j$
正交矩阵	$A^T=A^{-1}$ 或 $A^TA=AA^T=E$
酉矩阵	$A^+=A^{-1}$ 或 $A^+A=AA^+=E$
正规矩阵	$AA^+=A^+A$

37 矩阵运算及变换

（1）矩阵的导数 如矩阵 A 的元素 a_{ij} 都是变量 t 的函数，则 A 对 t 的一阶导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}a_{11}(t)}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_{12}(t)}{\mathrm{d}t}&\cdots&\frac{\mathrm{d}a_{1n}(t)}{\mathrm{d}t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\mathrm{d}a_{m1}(t)}{\mathrm{d}t}&\frac{\mathrm{d}a_{m2}(t)}{\mathrm{d}t}&\cdots&\frac{\mathrm{d}a_{mn}(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$$

同样可定义矩阵的高阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nA}{\mathrm{d}t^n}$ 等（设各元素对 t 高阶可微）。

（2）矩阵的积分 矩阵 A 的积分定义为

$$\int A\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\int a_{11}\mathrm{d}t&\int a_{12}\mathrm{d}t&\cdots&\int a_{1n}\mathrm{d}t\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\int a_{m1}\mathrm{d}t&\int a_{m2}\mathrm{d}t&\cdots&\int a_{mn}\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

同样可定义矩阵的多重积分。

(3) 矩阵求逆　若 A、B 二阵满足等式

$$AB=I\text{（单位阵）}$$

则称 A 为 B 的逆矩阵，或称 B 为 A 的逆矩阵，记作

$$A=B^{-1}\text{ 或 }B=A^{-1}$$

A 的逆阵 A^{-1} 按下式算出：

$$A^{-1}=\frac{\bar{A}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

式中，$\bar{A}$ 称为 A 的伴随矩阵（或附加矩阵），它的第 i 行第 j 列元素是 $|A|=|(a_{ij})|$ 的第 j 行第 i 列元素的代数余子式。例如 A 的伴随矩阵 $\bar{A}$ 第 1 行第 2 列的元素 A_{21} 是 $|A|$ 中元素 a_{21} 的代数余子式。

矩阵 A 可逆的充要条件是 $\det A=|A|\neq 0$，即 A 为非奇异方阵。

(4) 矩阵的相似变换和正交变换

相似变换　设 A、B 是两个 n 阶矩阵，如有 n 阶满秩矩阵 Q 存在，使得

$$B=Q^{-1}AQ$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相似，或称 A 经过相似变换 $Q^{-1}AQ$ 化为 B，记作 $B\sim A$。

正交变换　若有正交矩阵 Q 存在：

$$Q^{-1}=Q^{T}$$

则称 $Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ$ 为矩阵 A 的正交变换。

4.5　微积分[9~11,13,14]

38　导数运算法则和基本公式

(1) 导数运算基本规则

若 c 为常数，函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 的导数存在，则

$$(c)'=0\ (c'\text{ 为 }c\text{ 的导数})\quad (cu)'=cu'$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'\quad (uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

设　$y=f(u)$，$u=g(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(x)$$

设　$y=g(t)$，$x=f(t)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$$

(2) 基本函数的导数公式　见表 1.4-3。

表 1.4-3　基本函数的导数公式

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e\approx 0.4343\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x>1)$
$\operatorname{artanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arcoth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$-\frac{1}{x^2-1}$

39 不定积分和定积分

(1) 不定积分 不定积分的基本性质：

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x)$$

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x \quad \text{(分部积分法)}$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \quad x=\varphi(t) \quad \text{(换元法)}$$

基本函数积分表：

$$\int k\mathrm{d}x = kx + c \quad (k\text{ 为常数})$$

$$\int x^m\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + c$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + c$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

(2) 部分常用函数定积分

伽马(Γ)函数：

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}\mathrm{d}x \quad (n>0)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (n\text{ 为正整数})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

尤拉常数：

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x}\ln x\mathrm{d}x = 0.5772157$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \pi\Big/\left(n\sin\frac{m\pi}{n}\right) \quad (0<m<n)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/4$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (n>-1)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi/2 & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -\pi/2 & (a<0)\end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ (a>0),\ = -\frac{\pi}{2}\ (a<0)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2} \quad (a>0)$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(m-1)(m-3)\cdots(2\text{或}1)\times}{(m+n)(m+n-2)\cdots\times}\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots(2\text{或}1)}{(2\text{或}1)}\times c$$

(m, n 为整数；当 m, n 为偶数时 $c=\frac{\pi}{2}$，m 或 n 为奇数时 $c=1$)

40 级数

(1) 泰勒级数与马克劳林级数 当 n 无穷增加时，若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，函数 $f(x)$ 展开成无穷幂级数式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

称为泰勒级数。同样，当 $a=0$ 时，有马克劳林级数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

(2) 几种重要函数的幂级数 见表 1.4-4。

表 1.4-4 几种重要函数的幂级数

函数	展开式	收敛域
$(1+x)^m$	$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<1$
$(1+x)^{-m}$	$1-mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<1$
$(1+x)^{\frac{1}{2}}$	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots$	$\|x\|\leqslant1$
$(1+x)^{-\frac{1}{2}}$	$1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<1$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\tan x$	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\cdots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\cdots$①	$\|x\|<\frac{\pi}{2}$
$\arcsin x$	$x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$	$\|x\|<1$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2\cdot3}x^3-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7-\cdots-\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$	$\|x\|<1$
e^x	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$a^x=e^{x\ln a}$	$1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\ln x$	$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\cdots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}+\cdots\right]$	$x>0$
$\ln x$	$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots$	$0<x\leqslant2$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$	$-1<x\leqslant1$
$\sinh x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$
$\cosh x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$\|x\|<\infty$

① B_n 为伯努利系数，由下式确定：

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots+\frac{1}{m^{2n}}+\cdots=\frac{\pi^{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}B_n$$

44 傅里叶级数、傅里叶变换

(1) 傅里叶级数 满足关系式 $f(x+T)=f(x)$ 的函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数。如果周期函数 $f(x)$ 在区间上满足下列狄利克莱(Dirichlet)条件：1)连续或者只有有限个第一类间断点(在这种间断点，函数的跃变值有限)；2)只有有限个极值点，则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 可以展开成傅里叶级数：

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{2k\pi x}{T}+b_k\sin\frac{2k\pi x}{T}\right]$$

式中 a_k 和 b_k 是傅里叶系数。利用正交函数的性质，可得傅里叶系数的计算公式。

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2k\pi x}{T}\mathrm{d}x$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2k\pi x}{T}\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots)$$

定义在有限区间 (O,P) 上的函数（在区间"OP"之外无定义）$f(x)$，不考虑是否是周期性的，可以在区间 $(-P,O)$ 上延拓，按不同方式来定义。

(2) 几种常见的函数的傅里叶级数

1) $f(t)=\begin{cases}h & (0\leqslant t\leqslant T/2)\\ -h & (-T/2\leqslant t\leqslant 0)\end{cases}$

$$f(t)=\frac{4h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega t}{2n-1}$$

2) $f(t)=t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

$$f(t)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$$

3) $f(t)=t^2\quad(-T\leqslant t\leqslant T)$

$$f(t)=\frac{T^2}{3}-\frac{4T^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\frac{n\pi t}{T}\quad(-T\leqslant t\leqslant T)$$

4) $f(\omega t)=E|\sin\omega t|\quad(-\infty<t<+\infty)$

$$f(\omega t)=\frac{2E}{\pi}-\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)}$$

5) $f(\omega t)=\begin{cases}E\cos\omega t & \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{\pi}{2}\leqslant\omega t\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$

$$f(\omega t)=\frac{E}{\pi}+\frac{E}{2}\cos\omega t+\frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)}$$

6) $f(\omega t)=E\sin(\omega t+\pi/6)\quad\left[0\leqslant t\leqslant\frac{T}{3}\right]$

$$f(\omega t)=\frac{3\sqrt{3}E}{2\pi}\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\cos 3n\omega t\right]\quad(-\infty<t<+\infty)$$

(3) 傅里叶变换（傅氏变换） 若非周期函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，即广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x=$ 有限值，则函数 $f(t)$ 的傅氏变换为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$F(\omega)$ 的逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

若 $f(t)$ 是偶函数，则 $F(\omega)$ 变为傅氏余弦变换：

$$F_c(\omega)=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t$$

和

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(\omega)$ 变为傅氏正弦变换：

$$F_s(\omega)=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t$$

和

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

傅氏变换的卷积定理 若 $F(\omega)$、$G(\omega)$ 是 $f(t)$、$g(t)$ 的傅氏变换，则 $F(\omega)G(\omega)$ 为 f 和 g 的卷积变换：

$$f*g=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

42 拉普拉斯变换（拉氏变换）

(1) 拉氏变换对 设 $f(t)$ 是实变数 $t(t>0)$ 的函数，并且，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；它是连续函数或分段连续函数；$f(t)$ 是指数级的，即当 $t>T$（T 为某一相当大正数）时，$|f(t)|\leqslant Me^{at}$，M、a 是实常数，则

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=F(s)$$

称为拉氏变换，其中 $f(t)$ 称为原函数，$F(s)$ 称为象函数。

相应地有拉普拉斯逆变换式（拉普拉斯变换的反演公式）：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

此式亦简称拉氏逆变换式（或拉氏逆变换），记为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

式中，$F(s)$称为$f(t)$的象函数，$f(t)$则称为$F(s)$的原函数。象函数和相应的原函数构成拉氏变换对。

为了照顾电路有系统可能在$t=0$时有冲激信号$A\delta(t)$存在，拉氏变换的积分下限应取$t=0_-$，$f(t)$的定义域也应从0_-到∞，这样就能把冲激$\delta(t)$包括进去，即拉氏变换式应为

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(2) 拉氏变换若干性质和定理 见表1.4-5。

表1.4-5 拉氏变换的若干性质和定理($\mathscr{L}[f_i(t)]=F_i(s)$)

特性和定理	表达式	条件和说明
线性	$\mathscr{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=a\mathscr{L}[f_1(t)]+b\mathscr{L}[f_2(t)]$ $\mathscr{L}^{-1}[aF_1(s)+bF_2(s)]=a\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+b\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]$	a、b为常数
位移特性	时域延迟 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$	τ为一非负实数
	频域延迟 $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$	$\mathrm{Re}(s-a)>c$
微分	$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$ $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-[s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)]$	若所有初值为零，则有 $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)$ $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$
积分	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}F(s)$ $\mathscr{L}\left[\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t f(t)dt}_{n次}\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$	
初值定理	$\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$，或 $f(0)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$	$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在
终值定理	$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$，或 $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$	$sF(s)$所有奇点均在s平面左半部
卷积定理	$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$ $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ $=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ $=f_1(t)*f_2(t)$为$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积

(3) 拉氏变换简表 见表1.4-6。

表1.4-6 拉氏变换简表

$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$	$f(t)$
1	$\delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \infty & t=0\\ 0 & t>0\end{cases}$
$\frac{1}{s^n}\ (n=1,2\cdots)$	$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}\varepsilon(t)$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1-\cos at)$

(续)

$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$	$f(t)$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{s}$	$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at}+at-1)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$

（续）

$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$	$f(t)$
$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^3}(at-\sin at)$
$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}$

（4）用部分分式法求拉氏逆变换（海维赛德展开定理） 计算拉氏逆变换的基本方法是部分分式法，即将 $F(s)$ 展开成部分分式，成为可在拉氏变换表中查到的 s 的简单函数，然后通过反查拉氏变换表求取原函数 $f(t)$。

设 $F(s)=F_1(s)/F_2(s)$，$F_1(s)$ 的阶次不高于 $F_2(s)$ 的阶次，否则，用 $F_2(s)$ 除 $F_1(s)$，以得到一个 s 的多项式与一个余式之和。下面是三种基本的部分分式展开式

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

当 p_1 和 p_2 为共轭复数极点时，

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\cdots(s+p_n)}=\frac{a_1s+a_2}{(s+p_1)(s+p_2)}+\frac{a_3}{s+p_3}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{(s+p_1)^r(s+p_{r+1})\cdots(s+p_n)}=\frac{b_r}{(s+p_1)^r}+\frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{b_1}{s+p_1}+\frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}}+\frac{a_{r+2}}{s+p_{r+2}}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

式中，$a_1,a_2,\cdots a_{r+1},a_{r+2}\cdots a_n$ 和 $b_r,b_{r-1},\cdots b_1$ 为常数，为了确定这些常数，用 $F_2(s)$ 的一个因子 $(s+p_k)$ 乘以 $F_1(s)/F_2(s)$ 及其展开式的各项（$k=1,2,\cdots,n$）所得的恒等式对所有 s 的值都成立，相继令 $s=-p_k$，即可一一确定各常数。

43 Z变换

（1）Z变换 连续信号被采样后就得出离散函数，处理这些函数应用 Z 变换法。它在离散系统中所起的作用犹如拉氏变换之于连续系统。设 $z=e^{sT}$，Z 变换的定义为

$$\mathscr{Z}[x(t)]=X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$$

（2）Z 变换表 见表 1.4-7。

表 1.4-7 Z 变换表

$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$1(t)$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
t^2	$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
$a^k\cos k\pi$	$\dfrac{z}{z+a}$

4.6 矢量

44 矢量分析

∇ 为算子（DEL OPERATOR）：

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$$

梯度 $\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+j\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+k\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

散度 $\operatorname{div}A=\nabla\cdot A=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

旋度 $\operatorname{rot}A=\nabla\times A=i\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)+j\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)+k\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

(1) 有关 ∇ 的公式(假定 A、B、U 和 V 的偏导数存在)

$$\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$$

$$\nabla\cdot(A+B)=\nabla\cdot A+\nabla\cdot B$$

$$\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$$

$$\nabla\cdot(UA)=(\nabla U)\cdot A+U(\nabla\cdot A)$$

$$\nabla\times(UA)=(\nabla U)\times A+U(\nabla\times A)$$

$$\nabla\cdot(A\times B)=B(\nabla\times A)-A(\nabla\times B)$$

$$\nabla\times(A\times B)=(B\cdot\nabla)A-B(\nabla\cdot A)-(A\cdot\nabla)B+A(\nabla\cdot B)$$

$$\nabla(A\cdot B)=(B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B)$$

$$\nabla\cdot(\nabla U)=\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla\times(\nabla U)=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$$

(2) 球面坐标的梯度、散度和旋度(单位矢量 u_r、u_θ、u_φ)

$$\mathrm{grad}U=u_r\frac{\partial U}{\partial r}+u_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}+u_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

$$\mathrm{div}A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\mathrm{rot}A=u_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+u_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]+u_\varphi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

(3) 柱面坐标的梯度、散度和旋度(单位矢量 u_r、u_φ、u_z)

$$\mathrm{grad}U=u_r\frac{\partial U}{\partial r}+u_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}A=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}A=u_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+u_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+u_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]$$

(4) 高斯定理

$$\oint\!\!\oint_S A\cdot n\,\mathrm{d}S=\iiint_V(\nabla\cdot A)\,\mathrm{d}V$$

式中，n 是闭曲面外法向单位矢量；S 是闭曲面。

(5) 斯托克定理

$$\oint_C A\cdot\mathrm{d}l=\iint_S(\nabla\times A)\cdot n\,\mathrm{d}S$$

式中，C 为闭曲线；S 为以 C 为边界的面；n 为 S 面的法线单位矢量；$\mathrm{d}l$ 为 C 的微小长度矢量，n 和 C 的方向形成右手系。

4.7 近似计算和数值计算

45 误差

(1) 设 a 是真值，A 是近似值，则 $|A-a|=\Delta_a$ 是绝对误差；$\frac{\Delta_a}{|a|}=\delta_a$ 是相对误差。

(2) 有效数字　如果 Δ_a 不超过 a 的某一数位上的半个单位，那么在 a 中，从这一位往左，除去最左面第一个非零数字前的零外，所有数字都叫有效数字。

(3) 几个误差计算公式　见表 1.4-8。

表 1.4-8　几个误差计算公式

误差名称	相同精密度的观测	不同精密度的观测
标准误差(方均根误差 σ)	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}w_i(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}w_i}}$
算术平均值对真值的误差 δ	$\delta=\lvert\bar{x}-x\rvert=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
平均误差 η	$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lvert v_i\rvert}{n}$，$v_i=x_i-\bar{x}(i=1,2,\cdots,n)$　v——离差	

(4) 高斯误差定律[1]　随机误差的分布密度函数为正态型分布函数，

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-(hx)^2}$$

该式称为高斯误差方程，其图形称为误差曲线(见图1.4-1)，式中，$h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$称为精密度指数。

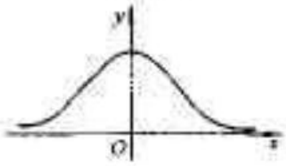

图1.4-1　误差曲线

46　插值、差分、差商和近似积分

(1) 插值　如 $y=f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 的函数，且已知 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=b$ 诸点的值为 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$，若有一函数满足 $P(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的关系，则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为插值节点，$[a,b]$ 为插值区间。

一般用插值函数 $P(x)$ 近似 $f(x)$，插值函数的求法有拉格朗日(Lagrange)插值，牛顿(Newton)插值公式，厄尔米特(Hermite)插值和三次样条插值等。

如拉格朗日插值多项式(差商插值多项式)为

$$L_n(x_i)=y_i\quad(i=0,1,2,\cdots,n)$$

$$L_n=\sum_{k=0}^{n}N_k y_k$$

$$N_k=[(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})\times(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)]/[(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})\times(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)]\quad(k=0,1,\cdots,n)$$

式中，N_k 称为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数，它们满足条件，

$$N_j(x_k)=\begin{cases}1 & k=j\\0 & k\neq j\end{cases}\quad(j,k=0,1,\cdots,n)$$

(2) 差分和差商　设函数 $y=f(x)$ 在结点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ (常取 $x_k=x_0+kh$) 处取值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，即 $f(x_k)=y_k(k=0,1,\cdots,n)$

一阶向前差分：$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$

二阶向前差分：$\Delta^2 y_k=\Delta y_{k+1}-\Delta y_k$

…………………………

m 阶向前差分：$\Delta^m y_k=\Delta^{m-1}y_{k+1}-\Delta^{m-1}y_k$

一阶向后差分：$\nabla y_k=y_k-y_{k-1}$

m 阶向后差分：$\nabla^m y_k=\nabla^{m-1}y_k-\nabla^{m-1}y_{k-1}$

一阶中心差分：$\delta y_{k+\frac{1}{2}}=y_{k+1}-y_k$

m 阶中心差分：

$$\delta^m y_k=\delta^{m-1}y_{k+\frac{1}{2}}-\delta^{m-1}y_{k-\frac{1}{2}}\quad(m\text{为偶数})$$

$$\delta^m y_{k+\frac{1}{2}}=\delta^{m-1}y_{k+1}-\delta^{m-1}y_k\quad(m\text{为奇数})$$

三种差分关系：

$$\nabla^k y_k=\Delta^k y_0,\ \delta^{2k}y_k=\Delta^{2k}y_0,\ \delta^{2k+1}y_{k+\frac{1}{2}}=\Delta^{2k+1}y_0$$

t 阶差商：

$$D^t f(x_k)=f(x_k,x_{k+1},\cdots,x_{k+t})=\frac{f(x_{k+1},\cdots,x_{k+t})-f(x_k,\cdots,x_{k+t-1})}{x_{k+t}-x_k}=\frac{1}{h^t}[\ln(1+\Delta)]^t f(x_k)$$

差分和差商的关系：

$$\Delta=e^{hD}-1,\ D=\frac{1}{h}\ln(1+\Delta)=\frac{1}{h}\left(\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots\right)$$

(3) 经验方程　如果观测到的数据是 $\{x_i\}$ 和 $\{f(x_i)\}$，$i=1,2,\cdots$，$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_i=f(x_{i+1})-f(x_i)$，则可利用向前差分法判定经验方程的类型。

1) 若 Δy_i = 定值，则方程为

$$y=a+bx$$

2) 若 $\Delta^2 y_i$ = 定值，则方程为

$$y=a+bx+cx^2$$

3) 若 $\Delta^3 y_i$ = 定值，则方程为

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

4) 若 $\Delta\left(\frac{1}{y_i}\right)$ = 定值，则方程为

$$\frac{1}{y}=a+bx$$

5) 若 $\Delta^2(y_i^2)$ = 定值，则方程为

$$y^2=a+bx+cx^2$$

6) 若 $\Delta^2\left(\frac{x_i}{y_i}\right)$ = 定值，则方程为

$$y=\frac{x}{a+bx+cx^2}$$

7）若 Δy_i 成等比数列，则方程为

$$y=ab^x+c$$

8）若 $\Delta \lg y_i$ 成等差数列，则方程为

$$\lg y=a+bx+cx^2$$

9）若 $\Delta^2 y_i$ 成等比数列，则方程为

$$y=ab^x+cx+d$$

（4）近似积分　近似积分法主要有根据积分中值定理的一般公式、牛顿一柯茨插值型求积公式（内插求积公式）和高斯积分法，这里主要介绍高斯积分法和一维高斯积分公式。

高斯积分法是在积分区间选择某些积分点 $\xi_i^{(n)}$（称为高斯点），求出被积函数 $f(x)$ 在高斯点的值 $f(\xi_i^{(n)})$，乘以相应的权数 $\omega_i^{(n)}$（权因子，即求积系数），然后求总和而得积分近似值。

一维高斯积分公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(n)} f(\xi_i^{(n)})$$

n 是积分点的总数，积分点坐标 $\xi_i^{(n)}$ 的值是 n 次勒让德多项式 $P_n(x)$ 的零点，在实际计算中，$\xi_i^{(n)}$ 和 $\omega_i^{(n)}$ 的值按表 1.4-9 选取（n 最大的值参见文献[15]）。

上式在区间[a，b]通过变换 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$ 可化成区间[-1，1]上的积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t$$

表 1.4-9　一维高斯积分点的位置和权因子

n	i	$\xi_i^{(n)}$	$\omega_i^{(n)}$
1	1	0	2
2	1	−0.5773502692	1
	2	+0.5773502692	1
3	1	−0.7745966692	0.5555555556
	2	0	0.8888888889
	3	+0.7745966692	0.5555555556
4	1	−0.8611363116	0.3478548451
	2	−0.3399810436	0.6521451549
	3	+0.3399810436	0.6521451549
	4	+0.8611363116	0.3478548451
5	1	−0.9061798459	0.2369268851
	2	−0.5384693101	0.4786286705
	3	0	0.5688888889
	4	+0.5384693101	0.4786286705
	5	+0.9061798459	0.2369268851

47　常微分方程、偏微分方程和线性代数方程组的数值计算方法

（1）常微分方程的数值计算方法　对于一阶方程（$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，边界条件为 $y_a=f(a)$，$y_b=f(b)$）的边值问题，主要的数值解法有尤拉公式、后退的尤拉公式、改进的尤拉公式、龙格-库塔法、阿达姆斯预测校正法等，对于一阶方程组的计算有改进尤拉法、龙格-库塔法等。高阶方程边值问题一般化为一阶方程组求解。一阶方程的四阶龙格-库塔法经典公式：

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$K_1=f_k(x_k,y_k)$$

$$K_2=hf\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3=hf\left(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4=hf(x_k+h,y_k+K_3)$$

（2）偏微分方程的数值计算方法　双曲形、抛物形和椭圆形三类方程可用有限差分法和有限元法求解。1）有限差分法用差商代替偏微分方程中的偏导数，得到相应的差分方程，通过差分方程得到偏微分方程的近似解；2）有限元法将连续场域剖分成有限个基本单元，优点是对任意边界形状的求解域比差分法有更强的适应性，但不能由场的方程直接离散成代数方程组，必须按变分或伽辽金法与分片插值相结合的原理，离散后得数值解。

（3）代数方程组的数值计算方法　线性代数方程组的直接法主要有高斯消去法、高斯-约当消去法（无回代）、克劳特分解法（LU 分解法）[illegible]、杜利特勒分解法、平方根法（系数矩阵正定对称）、追赶法（系数矩阵是对角占优的三对角阵）等。直接法占内存大。

线性方程组的迭代法主要有雅可比(Jacobi)迭代法、高斯-赛德尔迭代法、逐次超松弛迭代法(SOR法)等。迭代法只存非零元素，编程简单，但对迭代初值要求较高。

非线性代数方程组的数值解法主要有牛顿-拉夫逊迭代法[13]。

在电磁场数值计算中，常采用预处理共轭梯度法(ICCG法)，可节省大量内存(只存非零元素)，系数阵与右端向量经过预处理后，系数矩阵条件数下降，收敛速度加快，CPU时间显著减少。详细做法参见文献[15]。

4.8 概率和统计

48 概率的定义、简单性质和基本运算

(1) 概率　在相同条件下重复进行 n 次试验，当 n 充分大时，若 A 发生的频率 $f_n(A)$ 越来越趋近于 p，则称 p 为此试验中随机事件 A 发生的概率，简称事件 A 的概率。记作

$$P(A)=p$$

对于任何事件 A，均有 $0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant1$，由定义，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant1$$

显然，$P(Q)=1$，$P(\varnothing)=0$。

概率的简单性质：若必然事件记作 U，不可能事件记作 V，则

$$P(U)=1,\ P(V)=0,\ 0\leqslant P(A)\leqslant1$$

若 $A\subset B$(事件 B 包含事件 A)，则

$$P(A)\leqslant P(B)$$

若 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

(2) 概率的基本运算　概率加法定理：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

式中，$A+B$ 表示事件 A、B 至少有一个发生；AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生。

若事件 A 与事件 B 互斥，$AB=V$，则事件 $A+B$ 的概率：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=U$，$A_iA_j=V(i\neq j)$，则

$$\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=1$$

条件概率：在事件 A 出现的条件下事件 B 出现的概率，记作 $P(B|A)$，称为条件概率。其计算式为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

概率乘法定理：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

对于独立事件，则事件 A 与 B 同时发生的概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

对于概率相同的 n 个独立事件的积事件 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的概率为

$$P\left\{\prod_{i=1}^{n}A_i\right\}=[P(A)]^n$$

49 随机变量的分布函数和数字特征

(1) 随机变量的分布函数　随机变量的取值小于某一数 x 的概率是 x 的函数时，称为此随机变量的分布函数。由它可决定随机变量落入在 x 的任何范围内的概率。分布函数分离散型(例如二项分布，泊松分布)和连续型(例如正态分布)两类。

正态分布：一般地说，如果研究的某个量是被彼此间相互独立的大量偶然因素所影响，且每一因素在总的影响中只起很小的作用，则由这个总的影响所引起的该量的变化，就近似地服从正态分布，记作 $N(\mu,\sigma^2)$。正态分布的密度函数为

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$(-\infty<x<\infty)(\sigma>0)$$

式中，μ、$\sigma(\sigma>0)$为常数。正态分布的分布函数为

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

$$P(x\leqslant X)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx=\Phi_{\mu,\sigma}(x)$$

$$P(x<a\leqslant b)=\int_{a}^{b}\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx$$

$$=\Phi_{\mu,\sigma}(b)-\Phi_{\mu,\sigma}(a)$$

正态分布的密度函数 $\varphi(x)$ 和分布函数 $\Phi(x)$ 的图形见图1.4-2和图1.4-3。

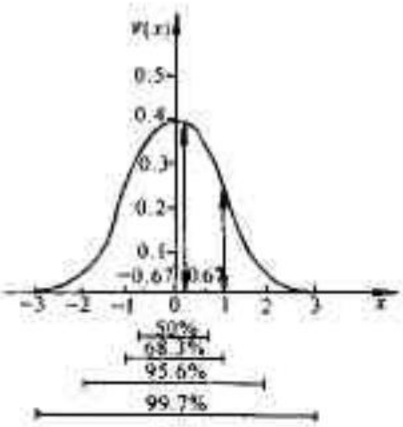

图1.4-2 正态密度函数 $\varphi(x)$
横坐标下第四横线表示：在(−3,3)中，
曲线下的面积是99.7%，其他横线意义类似

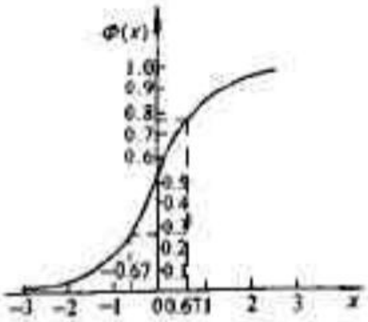

图1.4-3 正态分布函数 $\Phi(x)$

(2)数字特征 见表1.4-10。

表1.4-10 随机变量的数字特征

数字特征	正态分布
平均数(数学期望)$E(x)$或μ	μ
方差$D(x)$或σ^2	σ^2
标准差(均方差)σ	σ

50 统计量的概念

(1) 抽样方法 根据判断标准，首先确定抽样属于计数值还是计量值，分为计数抽样检验和计量抽样检验。每种抽样检验又分为一次抽样检验、二次抽样检验、多次抽样检验和序贯抽样检验。

(2) 总体(母体)与样本(随机样本、子样) 研究某个问题，它的对象的所有可能观察结果的全体称为总体(或称母体)，记作X。总体中的每个元素称为个体。从总体X中任意抽出的部分个体，称为总体的一个随机样本，简称样本(或子样)。样本中含有个体的个数称为样本的大小(或容量)。

(3) 抽样分布、统计量 样本是随机变量，是进行统计判断的依据，它的函数也是随机变量。如$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数，且g中不含任何未知参数，则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量。如$x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值，即样本的观察值，则可定义几个统计量如表1.4-11所示。

表1.4-11 几种常用的统计量

统计量名称	样本表示式		观察值表示式	
样本平均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$		$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$	
样本方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$		$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$	
样本标准差	$S=\sqrt{S^2}$		$s=\sqrt{s^2}$	
样本k阶原点矩	$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$	$k=1,2,\cdots$	$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$	$k=1,2,\cdots$
样本k阶中心矩	$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$		$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k$	

51 参数估计和假设检验

（1）参数估计[19,20] 如总体 X 的分布函数的形式为已知，但它的一个或多个参数为未知，根据来自母体 X 的一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对未知参数 θ 的值进行估计称为参数估计。参数估计分为点估计和区间估计。

所谓点估计，是求某一个参数的估计值。设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$ 的形式为已知，其中有待估参数 θ，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值。点估计就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 作为未知参数 θ 的估计值。常用构造估计量的方法有矩估计法和极大似然估计法两种，具体步骤参见文献[9,20]。

所谓区间估计是要估计参数的一个范围，以及这个范围包含参数 θ 真值的可信程度。这样的范围通常以区间的形式给出，所以称为区间估计。这样的区间即所谓置信区间。

（2）假设检验（统计检验） 在总体的分布函数完全未知或只知其形式，但不知其参数的情况下，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的假设。

采用一个合理的法则，对假设作出判断，认为适当则接受，不适当则拒绝，所以接受假设 H_0，即拒绝假设 H_1，或者反之。

52 正态概率纸和回归分析

（1）正态概率纸[11] 利用正态概率纸可判定某一随机变量的一批试验数据是否服从正态分布，并可对 μ、σ 作出估计。

正态概率纸以各分组数据的上值为横坐标，累积频率为纵坐标分别描点。若所描出的点大致在一条直线上，则可判定此随机变量服从正态分布，然后凭目力配置一条直线，此直线称为回归直线。

从纵坐标刻度为 50 的点引一条水平线与回归直线相交，此交点所对应的横坐标即为 μ 的估值；从纵坐标刻度为 15.9 的点引水平线与回归直线相交，此交点所对应的横坐标就是 μ 估值与 σ 估值之差，由此可算得 σ 的估值。

（2）回归分析[11,21] 把不具有确定函数关系而只具有相关关系的变量，通过统计处理得出这些变量间关系的主要趋向曲线（回归曲线），并对实际数据偏离该曲线的程度作出概率估计。

设随机变量 y 与 x 之间存在着某种相关关系，且 x 是可以控制或可以精确观测其数值的自变量，即可认作是普通的变量。由于 y 是随机变量，对于 x 的每一个确定值，y 有它的分布。若 y 的数学期望存在，其值随 x 之值而定，即 y 的数学期望是 x 的函数，记作 $\mu(x)$，$\mu(x)$ 称为 x 的回归。$y=\mu(x)$ 就称为 y 关于 x 的回归函数，又称为 y 关于 x 的回归方程。

对于一元线性回归：设变量 x 和 y 的 n 次观测值为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，若 x 和 y 间存在一定的线性关系，则可用下列直线方程进行拟合：

$$\hat{y}=a+bx$$

式中，a、b 可利用最小二乘法解得：

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}$$

式中，$\bar{x}$、$\bar{y}$ 分别为 x_i 和 y_i 的平均值。

一元线性回归的相关系数，两变量之间的线性关系的密切程度可用相关系数 r 表示：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$|r|\leqslant 1$，当 $|r|=1$ 时，x、y 为完全线性关系；$|r|<1$ 时，x、y 有一定的线性关系，而 $|r|$ 越接近于 1，表示线性关系越密切；当 $|r|=0$ 时，表示 x、y 间毫无线性关系。

一元线性回归的回归线的精度，可用剩余标准离差 s 表示

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}$$

s 越小，则回归方程预报的 y 值越准确。

参考文献

1 GB 3100~3102-93 量和单位. 北京:中国标准出版社,1994
2 机械工程手册电机工程手册编辑委员会. 电机工程手册,第2版,第1卷,第1~5篇. 北京:机械工业出版社,1996
3 GB/T2900.1-92 电工术语 基本术语. 北京:中国标准出版社,1993
4 全国自然科学名词审定委员会. 基础物理. 北京:科学出版社,1986
5 王之江. 光学技术手册. 北京:机械工业出版社,1987
6 沈由鼎等. 物理学词典常数手册. 北京:科学出版社,1986
7 K. Gierk. Technische formelsammlung. Heilbronn Giech Verlag,1984
8 F 格鲁姆等. 辐射度学. 理家桑等译. 北京:机械工业出版社,1987
9 《数学手册》编写组. 数学手册. 北京:高等教育出版社,1979
10 A. M. Howatson, et al. Engineering Tables and Data. Chapman & Hall. Ltd,1972
11 太原重型机械学院. 工程数学. 机械工程手册,第2篇. 北京:机械工业出版社,1982
12 周克定. 电工数学,上册. 武汉:华中工学院出版社,1984
13 绪方胜彦. 现代控制工程. 卢伯英译. 北京:科学出版社,1976
14 简明数学手册编写组. 简明数学手册. 上海:上海教育出版社,1978
15 盛剑霓. 工程电磁场数值分析. 西安:西安交通大学出版社,1991
16 王梓坤. 常用数学公式大全. 重庆:重庆出版社,1991
17 胡之光. 电机电磁场的分析和计算,修订本. 北京:机械工业出版社,1989
18 何福昭等. 概率论与数理统计. 北京:北京理工大学出版社,1988
19 王福保等. 概率论与数理统计. 上海:同济大学出版社,1988
20 盛骤等. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版社,1990
21 狩宫安男. 数学公式、数表、单位及物理常数. 电工技术手册,第1卷,第一篇,戴妙君译. 北京:机械工业出版社,1984
22 茆诗松等. 可靠性设计. 上海:华东师范大学出版社,1984
23 中华人民共和国标准化法. 七届人大常委会五次会议通过,1988
24 中华人民共和国标准化法实施条例. 国务院发布,1990
25 GB1.1 标准化工作导则 标准编写的基本规定. 北京:中国标准出版社
26 李春田. 标准化概论(修订本). 北京:中国人民大学出版社,1988
27 金光圭. 标准化工作手册. 北京:中国标准出版社,1993
28 采用国际标准和国外先进标准管理办法. 北京:国家技术监督局,1993
29 中国电工技术学会. 国际及国外先进标准浅析. 北京:机械工业出版社,1988