DOI:10.15961/j.jsuese.1979.02.004

可控硅整流器的数学模型

由克伟

可控硅整流器兼有能量变换和能量控制的能力，在自动控制系统中多用作可控功率放大器，当作执行元件使用。在分析、设计和调试应用可控硅整流器的自动控制系统时，需要知道可控硅整流器的数学模型。

本文分析了可控硅整流器的工作过程，指出了整流过程的实质和特点。根据分析结果，求出了可控硅整流器的数学模型，讨论了简化模型及其应用条件。

一、可控整流过程的实质及特点

我们先讨论可控硅整流器进行相位控制时整流过程的实质和特点。图1是任意相的不控整流波形。这时，每隔一定间隔 τ 进行一次换相，换相间隔是相等的，其大小等于自然换相间隔，即：

$$\tau = \frac{1}{m \cdot f} = \frac{1}{m} \cdot T \tag{1}$$

其中 $T = \frac{1}{f}$，f—电源频率，m—由整流器接线方式决定的常数，如单相全波 $m=2$，三相半控桥式或三相零式 $m=3$，三相全控桥式或六相零式 $m=6$，等等。

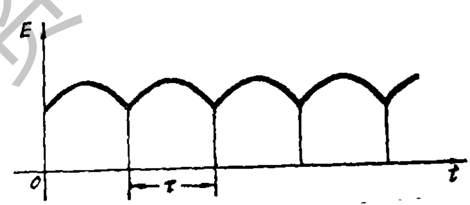

图1　任意相不控整流波形

当可控整流按相位进行控制时，整流器的输出波形如图2所示。由于进行相位控制换相间隔不再相等了，随相位控制角的不同而异，其大小由下式决定：

$$\tau_i = \left(\frac{1}{m} + \frac{\Delta\alpha_i}{2\pi}\right) \cdot T \tag{2}$$

其中 $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ 是相邻两个相位控制角之差。

由(2)式可见，τ_i 是变化的，其平均值为：

$$\tau = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\alpha_i}{2\pi}\right)\cdot T \tag{3}$$

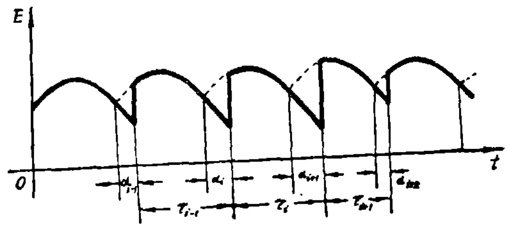

图 2　任意相可控整流波形

一般说，$|\Delta\alpha_i| \leq \frac{2\pi}{m}$ 故 τ 的变化范围将是 $0 \leq \tau \leq \frac{2}{m}T$。事实上，由于控制系统动态响应的变率一般不大，$\Delta\alpha_i$ 也不大，τ 多在 $\frac{T}{m}$ 左右变化，动态分析时，可取 $\tau = (0.5 \sim 1.5)T/m$。

从图2可以看出，进行相位控制时，整流过程的实质就是以 τ_i 为周期对不控整流波形进行准脉冲宽度调制。

另外，由于可控硅的失控特性，可控硅一旦导通，再加触发脉冲对可控硅已不再起作用。因此，从控制特性看，可控硅整流器对其相位控制触发角来说，等效于一个采样器，对连续变化的相位控制角进行采样，采样周期等于换相间隔。由(2)式看出，采样周期是由 $\Delta\alpha_i$ 决定的一个随机变量。因此，对连续变化的相位控制角来说，可控整流过程又是一个随机采样过程。

通过以上讨论看出，可控整流过程的实质和特点，就是对不控整流波形进行准脉冲宽度调制，以及对连续变化的相位控制角进行采样。明确了这些特点以后，就不难求出可控硅整流器的数学模型。

二、可控硅整流器的数学模型

对于可控硅整流器来说，求其数学模型，就是找出可控整流输出电势E和相位控制角 α 之间的函数关系 $E = f(\alpha)$。

由于在一个采样周期内 $\Delta\alpha$ 变化不大，可以把随机采样看成常规采样，即以平均换相间隔 τ 做为采样周期。这样，对连续变化的相位控制角 $\alpha(t)$ 的采样时刻将发生在 $t_i = i\tau$，如图3所示。这时采样所得脉冲的高度为 $\alpha(t_i)$，宽度为可控硅的开通时间 t_{on}。由于 t_{on} 远小于采样周期和可控硅整流器负载回路（或系统）的时间常数，相比

之下，可以认为 t_{on} 为零。这样就可以用 δ－函数来描写整流过程的采样特性。δ－函数为：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)=1$$

于是在采样时刻 $t_i=i\tau$ 时产生的理想脉冲列就是：

$$\delta_\tau(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-i\tau) \tag{4}$$

被理想脉冲列调制后的连续相位控制角 $\alpha(t)$ 变成了离散值 $\alpha^*(t)$，即

$$\alpha^*(t)=\alpha(t)\cdot\delta_\tau(t)$$

将 (4) 式代入上式并计及物理可实现性，上式变为：

$$\alpha^*(t)=\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha(i\tau)\cdot\delta(t-i\tau) \tag{5}$$

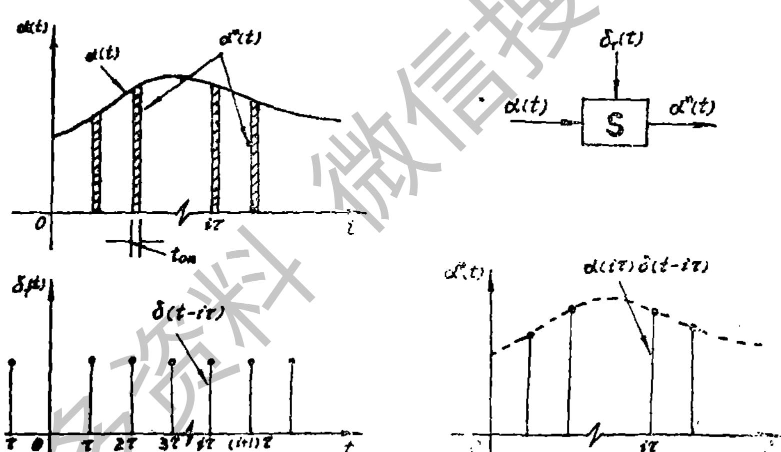

图 3　等效采样过程

对 (5) 式进行拉氏变换[1]，得：

$$A^*(S)=\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha(i\tau)\exp(-i\tau S) \tag{6}$$

引入新变量 $Z=\exp(\tau s)$，又可求出 $\alpha^*(t)$ 的 Z 变换[2]，即：

$$A(Z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha(i\tau)Z^{-i} \tag{7}$$

(5)、(6)、(7) 分别说明在时域 t 、复域 S 和复域 Z 内的采样相位控制特性，三个公式是等效的。

可控硅触发以后，相位控制角 $\alpha(t)$ 再变化对可控硅已不起作用，输出电势不再变化，只有等过了自然换相点，下一个触发脉冲出现时，才能反映出相位控制角 $\alpha(t)$ 的变化。在采样间隔 τ 内，输出电势保持常量，完全等效于零阶保持器。零阶保持器的传递函数是[3]：

$$W_h(S)=\frac{1-exp(-\tau s)}{S} \tag{8}$$

为了求出数学模型，还必须找到采样相位控制角 $\alpha^*(t)$ 所对应的输出电势 $e(t)$。我们知道，整流器的接线方式确定以后，就可以很容易地的求出这种关系。由图 2 看出，$\alpha^*(t)$ 对应的输出电势 $e(t)$ 是由 τ_i 所调制的切断正弦波。用怎样的数学方程描述这种波形，才符合于系统的实际工作情况呢？由于对不控整流波形进行准脉冲宽度调制的同时，其幅值也有改变，从对系统的作用看，事实上是对宽度、幅度的同时调制，这给数学处理带来了一定的困难。离散系统经常遇到这类问题，已经进行了不少研究，比较有效的处理方法是等效面积原理[4]。这一原理指出，当两个势函数 $\gamma(t)$ 和 $\gamma'(t)$ 作用于线性系统时，在一个很小的采样区间T内，如果满足下述方程：

$$\int_{nT}^{(n+1)T} r(t)dt=\int_{nT}^{(n+1)T} r'(t)dt \tag{9}$$

则 $r(t)$ 与 $r'(t)$ 对系统的作用是动态等效的。

如果系统除了可控硅整流器以外是线性的，其权函数是 $g(t)$，那么，在每个采样间隔 τ_i 内，由 $\alpha(i\tau)$ 所确定的输出电势 $e(i\tau)$ 引起的系统动态响应 $X_i(t)$ 是 $e(i\tau)$ 和 $g(t)$ 的卷积，即：

$$X_i(t)=\int_{-\infty}^{t} e(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma$$

由于 $e(i\tau)=e_i(t)$ 是在 $i\tau\leq t\leq(i+1)\tau$ 内，$\alpha(i\tau)=\alpha_i(t)$ 所对应的电势，可把积分区间 $-\infty\to t$ 用 $i\tau$ 和 $(i+1)\tau$ 之和代替，则系统总动态响应 $X(t)$ 将是：

$$X(t)=\Sigma X_i(t)=\sum_{i=-\infty}^{n}\left\{\int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma\right\} \tag{10}$$

假设系统响应不很快，其变率不大，在 τ 内 $g(t)$ 可以近似看做常量，于是上式近似为：

$$X(t)\cong\sum_{i=-\infty}^{n} g(t-i\tau)\int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e(\sigma)d\sigma \tag{11}$$

上式说明，系统的响应完全由 $e(i\tau)$ 和时间的积分决定，而与函数 $e(i\tau)$ 的形状无关。设在区间 τ 内由 $\alpha(i\tau)$ 对应的电势 $e(i\tau)$ 的平均值为 E_{ip}，根据等效面积原理，由

(9)、(11) 式得：

$$E_{ip}=\frac{1}{\tau}\int_{i\tau}^{(i+1)\tau}e(i\tau)dt \tag{12}$$

这样，我们就从理论上证明了只要系统动态过程较缓慢，在整流器的一个换相期间 τ 内，$g(t)$ 变化不大，就可以用平均电势代替随时间任意变化的电势。(12) 式同时也说明，进行动态分析时，可以不考虑换相重叠角对波形的影响。因此，我们取输出电势而不取电压，将整流器看成一个产生平均电势的电源，以等值内阻 $\frac{m}{2\pi}X_s$ ($X_s=\omega L_s$ 是整流变压器的漏抗) 计及换相重叠角对输出电压的影响。这样处理另一个好处，是使整流器的数学模型成为单向性环节了。可控硅整流器的输出电势平均值 E_{ip} 为：

$$E_{ip}=E_{do}f(\alpha_i) \tag{13}$$

其中 E_{do}——相位控制角 $\alpha=0$ 时的输出电势平均值。$f(\alpha i)$——由整流器接线方式决定的函数，如单相半波、三相桥式半控时 $f(\alpha)=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$；单相全波、三相零式三相桥式全控，六相零式时 $f(\alpha)=\cos\alpha$，等等。

应该注意，$\alpha_i=\alpha(i\tau)$ 是系统处在动态过程时的相位控制角，如果过渡过程中触发 n 次，则动态过程中输出电势的平均值应为：

$$E_{dp}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_{ip}=\frac{E_{do}}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i) \tag{14}$$

事实上，由于系统权函数 $g(t)$ 的变率不大，αi 总是在某一给定的 α 附近变化，可以认为：

$$f(\alpha)\simeq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\alpha i)$$

将上式代入 (14) 式得：

$$E_{dp}=E_{do}f(\alpha)$$

由 (8) 及 (14) 式和函数 $f(\alpha)$，最后得到可控硅整流器的传递函数是：

$$W_Z(S)=K_Z\frac{1-e\times p(-\tau s)}{S} \tag{15}$$

其中，$K_Z=E_{do}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\cong E_{do}\sin\alpha$，是可控硅整流器的传递系数。

方程 (15) 就是我们求出的可控硅整流器的数学模型。显然，这是一个离散模型，应用时，必须用 Z 变换法进行系统的分析计算，有时过于繁杂。

下面我们讨论可控硅整器数学模型的简化问题。

三、简化数学模型及其应用条件

由（5）式可知，$\alpha^*(t)$ 是周期函数，故可展开为复数形式的富氏级数，于是（5）式又可以写成：

$$\alpha^*(t)=\frac{1}{Z}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\alpha(t)\exp(ji\omega_\tau t) \tag{16}$$

其中 $\omega_\tau=2\pi f_\tau=2\pi/\tau$，是可控硅整流器的等效平均采样频率。

对（16）式进行拉氏变换得：

$$A^*(s)=\frac{1}{\tau}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A(s+ji\omega_\tau) \tag{17}$$

由于 $A^*(s)$ 的极点满足 $R_e(s)<0$，故可令 $S=j\omega$，代入（17）式得：

$$A^*(j\omega)=\frac{1}{\tau}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}A\left[j(\omega+i\omega_\tau)\right] \tag{18}$$

从（18）式看出，相位控制角 $\alpha(t)$ 被采样后的频谱，是由以采样频率 ω_τ 为周期的无限多个离散频谱组成。而 $\alpha(t)$ 频谱 $A(j\omega)$ 为一孤立连续谱。其最高频率如为 ω_{max} 由采样定理知道[5]为了不使连续相位控制角 $\alpha(t)$ 的频谱发生畸变，采样频率 ω_τ 必须足够高，才能使频谱不重叠，即必须使 $\omega_\tau\geq 2\omega_{max}$。这样，才能保证被采样的 $\alpha(t)$ 能够恢复。另一方面，相位控制角 $\alpha(t)$ 的频谱带宽是由控制系统的开环载止频率 ω_C 所限定的[6]，且 $\omega_c<\omega_{max}$。因此，$\alpha(t)$ 被采样后仍不失真的条件是：

$$\omega_c<\frac{1}{2}\omega_\tau \tag{19}$$

上述不等式只是指出了不失真的条件，考虑到 ω_c 总是小于 ω_{max}，而且 $\omega_C\cong 0.5\omega_{max}$ 和 $\omega_{max}\leq 0.5\omega_\tau$，所以，为使 $\alpha(t)$ 不失真，即 $\alpha(t)$ 虽然被采样，但仍能恢复到原来的 $\alpha(t)$ 的条件为：

$$\omega_c\leq\frac{1}{4}\omega_\tau$$

再考虑到一定裕量，设计时可取：

$$\omega_C=(0.1\sim0.2)\omega_\tau \tag{20}$$

例如，对于使用三相桥式全控流器的系统，设计电流环的截止频率时，可取 $\omega_C=180\sim360^1/$秒。实践证明，一般系统的截止频率在这个范围以内。

在上述条件下，虽然 $\alpha(t)$ 的波形可以恢复，但由零阶保持器的特性知道[7]，经过零阶保持器的信号将会产生一定时延，延滞时间为采样周期的二分之一。因此，在满足

(19) 式的前提下，整流器的数学模型可以简化为比例加时滞环节，即其传递函数为：

$$W_Z(s)=K_Z e\times p(-T_Z S) \tag{21}$$

其中 $T_Z=\tau/2$，是可控硅整流器的等效时滞，一般情况下可取 $T_Z=(\frac{1}{2}\sim\frac{1}{4})T/m$。由于 T_Z 和系统其他环节的时间常数相比，一般说比较小，(21) 式可以简化为：

$$W_Z(s)=\frac{K_Z}{T_Z S+1} \tag{22}$$

即将可控硅整流器等效于一个惯性环节。当按 (20) 式选取系统的截止频率 ω_c 时 ω_τ 远离 ω_c，等效惯性环节的特性处于对数幅频特性的高频区，对系统的动态特性影响不大。因此，可控硅整流器的数学模型还可以进一步简化为一比例环节。即其传递函数为：

$$W_Z=(s)=K_Z \tag{23}$$

以上我们讨论了可控硅整流器的两类四种数学模型，在进行系统分析设计时，选取哪一种数学模型，要根据实际情况和需要而定，但是必须注意各种模型的应用条件。

四、结　　论

根据考虑的条件不同，可控硅整流器的数学模型可以分为离散模型和连续模型两类。

Ⅰ、　离散数学模型

对可控硅整流器进行相位控制时，整流过程的实质可以看成是对不控整流波形进行准脉冲宽度调制。整流过程的基本特点是等效于采样过程和具有零阶保持器特性。因此，根据离散系统理论，可以求出其离散数学模型：

$$W_Z(s)=K_Z\frac{1-e\times p(-\tau s)}{S}$$

Ⅱ、　连续数学模型：

根据采样定理，设计系统时保证截止频率 $\omega_c<0.5\,\omega_\tau$，就可以将离散模型简化为连续模型，即比例加时滞环节：

$$Wz(s)=K_Z e\times p(-T_Z s)$$

当 T_Z 远小于系统其他环节的时间常数时，模型可以简化为惯性环节：

$$W_Z(s)=\frac{K_Z}{T_Z s+1}$$

使 ω_τ 远离 ω_c 时，模型可以进一步简化为比例环节：

$$W_Z(s)=K_Z$$

使用各种模型时，应注意其应用条件。

此外，当可控硅整流器用于快速系统时，应当考虑等效采样周期 τ（实际上就是整流器的接线方式和电源频率）与系统的参数（如时间常数）匹配，这是一个很有实际价值的问题，因已属系统的设计范畴，这里不再讨论。

参 考 文 献

1. М.Ф.Гарднер и ДЖ. Л. Барнс: Переходные процесы в линийных системах,МОСКВА, 1961.

2. 3. J.T.Tou: Digital and Sampled-data Control Systems, McGran-Hill Book Company, Inc, N、Y., 1959.

4. R.E.Andeen; The Principle of Eguivalent Areas, AIEE, Transaction Part.Ⅱ, Application and Industry, 1960, №51 PP.332-336.

5. B.M.Oliuer, J.R. Pierce, C.E.Shannon: The Philosophy of Pulse Code Modulation, Proc. IRE, 1948, 36, №11, PP. 1324-1331.

6. J.E.Truxal(Ed): Contnol Engineer' Handbook, McGraw-Hill Book Company, Inc., N.Y., 1958.

7. 同2

（本文1978年12月23日收到）